

IA 物理Ⅱ  
テキスト

**<科学法則と微分方程式>**

3年\_\_\_\_\_組\_\_\_\_\_番 氏名\_\_\_\_\_

iA 物理II  
テキスト  
<科学法則と微分方程式>

目次

0. はじめに	.....	2
1. 微分方程式の基本形	.....	3
2. 微分方程式の応用例	.....	7
3. 空気抵抗力を受ける落体の速さの測定実験	.....	16
4. コンデンサーの放電実験	.....	23
5. 微分方程式の数値解	.....	29
6. 参考文献	.....	32

## 0. はじめに

16世紀の終わり頃から17世紀の初めにかけて、ガリレイは地上での落体の運動を、ケプラーは惑星の運動を、それぞれいくつかの式にまとめた。これらはともに、科学的な実験や精密な分析による結果である。

しかし、落体の運動の公式とケプラーの三法則は似ても似つかないものであり、地上での物体の運動と天体の運動とは全く別の現象であることは誰の目にも明白であった。

ところが17世紀後半になって、ニュートンは、これらをある共通の原理（運動方程式）で統一的に記述することに成功した。

なぜ、運動方程式が様々な力学現象を説明できるのか。

それは運動方程式が微分方程式の一種だからである。

物体の速度の時間変化率（加速度）が質量に反比例し力に比例するという関係は、非常に狭い範囲について述べたものに過ぎないが、力の働き方と初速度などの条件を考慮しながら速度の変化を考えていくこと（=数学的には微分方程式を解くこと）で、物体がどのように運動するかが分かる。すなわち局所的な情報から大域的な情報を得ることができるのである。

運動方程式に限らず、科学法則、特に物理法則は微分方程式で書かれることが多い。それは、物理法則が、物理量の変化に関するものだからである。これらをいろんな条件下で解くことによって、様々な現象を、限られたいくつかの基本法則で説明することが可能になる。

学校設定科目「iA 物理Ⅱ」では、微分方程式を解くことで、複雑な現象を説明できるとの醍醐味を味わってほしい。

さて、本テキストでは、話を簡単にするために、次のように取り決めるものとする。

運動方程式を例に挙げてみよう。質量 $m$ の物体が力 $\vec{F}$ を受けたときの運動方程式は、速度 $\vec{v}$ 、時刻 $t$ を用いて、

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

である。

ところで、ベクトルは $\vec{F}$ 、 $\vec{v}$ （など）ではなく、 $F$ 、 $v$ （など）のように太字の斜体で書くのが一般的である。したがって、運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

この運動方程式は、

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z), \vec{F} = (F_x, F_y, F_z) \quad \text{として,}$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x, m \frac{dv_y}{dt} = F_y, m \frac{dv_z}{dt} = F_z$$

と書くのと同じことである。ベクトルは各成分に分解すれば済むので、本テキストでは一つの成分のみに限って表すものとし、単に、

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

と表すことにする。

また、時刻 $t$ で微分するときはその文字の上に $\cdot$ （ドット）を付けて表すことがある。

したがって、位置を $x$ とすれば、

$$\text{速度は } v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$\text{加速度は } a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \text{ または } a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

となる。これを用いれば運動方程式は、 $m\dot{v} = F$  または  $m\ddot{x} = F$  となる。

しかし、本テキストでは、どの量で微分したかをはっきりさせるため、

$$m \frac{dv}{dt} = F \text{ または } m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

と表すことにする。

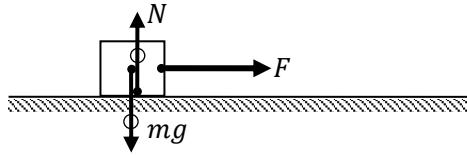
## 1. 微分方程式の基本形

運動方程式から等加速度運動の公式を導いてみよう。質量  $m$ , 力  $F$ , 速度  $v$ , 時刻  $t$  とすると, 運動方程式は,

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

である。これは速度  $v$  についての微分方程式である。

受ける力が一定 ( $F$  が定数) の場合, 運動方程式は,



$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{F}{m} \\ \therefore dv &= \frac{F}{m} dt \\ \therefore \int dv &= \int \frac{F}{m} dt \\ \therefore v &= \frac{F}{m} t + C_1 \quad (C_1 \text{ は定数}) \end{aligned}$$

ここで,

$$\frac{F}{m} = a$$

とおくと,

$$v = at + C_1$$

$t = 0$  のときの速度 (初速度) を  $v_0$  とすると,

$$v_0 = a \cdot 0 + C_1$$

となるので,

$$v = at + v_0$$

となる。

なお,  $v = at + C_1$  のように, 任意の定数 ( $C_1$ ) を含む解を一般解という。 $C_1$  の値を特定するための条件「 $t = 0$  のときの速度を  $v_0$  とする」を初期条件という。さらに, 初期条件を考慮した  $v = at + v_0$  を特殊解 (特解) という。

また, 物体の位置を  $x$  とすると, この式も微分方程式である。つまり,

$$\frac{dx}{dt} = at + v_0$$

$$\therefore dx = (at + v_0) dt$$

$$\therefore \int dx = \int (at + v_0) dt$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + C_2 \quad (C_2 \text{ は定数})$$

$t = 0$  のときの位置を  $x_0$  とすれば,

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0$$

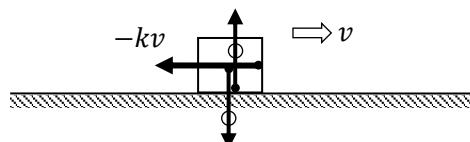
となる。

1年生時の授業では, 等加速度運動の公式を学んだ後に (物体が加速する原因として) 力を学んだが, 力のはたらき方によって加速の仕方が決まるわけだから, 運動方程式から始めるアプローチの方がすっきりしている。

もう少し複雑な例を見てみよう。

### 【基本形 1】

図のように, 滑らかな水平面上で質量  $m$  の物体に初速度  $v_0$  を水平方向に与えたとき, 時刻  $t$  における物体の速度  $v$  を求めてみよう。ただし物体は, 速度に比例し逆向きの空気抵抗力を受けるとし, その比例定数を  $k$  とする。



運動方程式より,

$$m \frac{dv}{dt} = -kv \quad \cdots (1)$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v$$

$v$  を含む項と  $dv$  が,  $t$  を含む項と  $dt$  がそれぞれ同じ辺にないと積分できないので, 次のように変形する。

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt$$

これを変数分離 (形) と呼ぶ。

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int dt$$

$$\therefore \log v = -\frac{k}{m} t + C_1 \quad (C_1 \text{は定数})$$

$$\therefore v = e^{-\frac{k}{m}t + C_1}$$

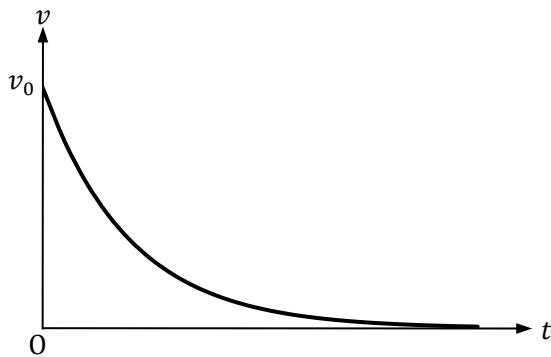
$t = 0$ のとき  $v = v_0$  より,

$$v_0 = e^{-\frac{k}{m}0 + C_1}$$

$$\therefore e^{C_1} = v_0$$

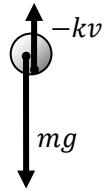
$$\therefore v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} \quad \cdots (2)$$

これより,  $t \rightarrow \infty$  のとき  $v \rightarrow 0$  となり, 十分に時間が経過すると, 物体は静止する。



### 【基本形 2】

次は, 空気抵抗を受ける落体の運動を考えてみよう。



重力加速度の大きさを  $g$ , 鉛直下向きを正の向きとすると, 運動方程式は,

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \quad \cdots (3)$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v$$

$$\therefore \frac{dv}{g - \frac{k}{m} v} = dt$$

$$\therefore \int \frac{dv}{g - \frac{k}{m} v} = \int dt$$

$$\therefore -\frac{m}{k} \log \left( g - \frac{k}{m} v \right) = t + C_1 \quad (C_1 \text{は定数})$$

$$\therefore \log \left( g - \frac{k}{m} v \right) = -\frac{k}{m} t + C_2 \quad (C_2 \text{は定数})$$

$$\therefore g - \frac{k}{m} v = e^{-\frac{k}{m}t + C_2}$$

$$\therefore v = \frac{m}{k} \left( g - e^{-\frac{k}{m}t + C_2} \right)$$

例えば  $t = 0$  のとき  $v = 0$  とすると,

$$0 = \frac{m}{k} (g - e^{C_2})$$

$$\therefore e^{C_2} = g$$

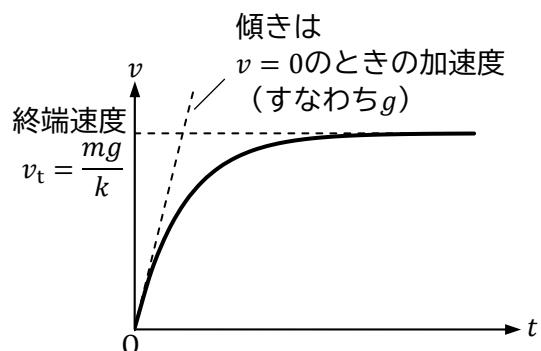
$$\therefore v = \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \quad \cdots (4)$$

やや複雑だが, きちんと変数分離できれば解けることが分かるだろう。

$t \rightarrow \infty$  のとき  $v \rightarrow v_t$  とすると,

$$v_t = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\infty}) = \frac{mg}{k}$$

この  $v_t$  は終端速度である。グラフ化すると下図のようになり, 終端速度  $v_t$  に近づいていくことが分かる。



**<演習 1-1>**

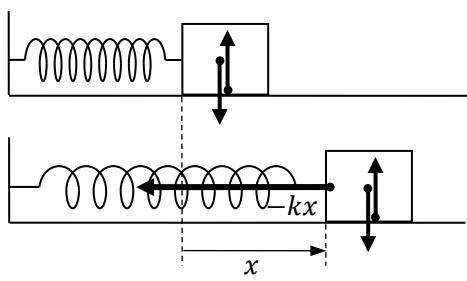
上記の例について，物体の位置 $y$ を時刻 $t$ で表し， $y - t$ グラフを描け。 $t = 0$ のとき $y = 0$ とする。

**<演習 1-2>**

上記の例について，時刻 $t$ を，位置 $y$ ，速度 $v$ ，終端速度 $v_t$ ，重力加速度の大きさ $g$ で表せ。

### 【基本形 3】

質量  $m$  の物体が、変位  $x$  に比例した大きさの力を逆向きに受ける場合の運動を考えてみよう。



比例定数を  $k$  とすると、運動方程式は、

$$m \frac{dv}{dt} = -kx \quad \cdots (5)$$

であるが、これはさらに、

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \cdots (6)$$

となり、 $x$  と  $t$  に関する二階の微分方程式となる。これを解析的に解くのはややわざらわしいので、次のように解を求めてみよう。

まず、解を

$$x = A \sin(\omega t + \theta)$$

と仮定する ( $A$ ,  $\omega$ ,  $\theta$  は定数)。これは三角関数の一般的な形である。このようにおける、 $x$  を 2 回微分したときに  $-x$  が現れるため、(6) 式と比較できる。

$$\frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \theta)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \theta)$$

よって(6)式は、

$$m\{-A\omega^2 \sin(\omega t + \theta)\} = -kA \sin(\omega t + \theta) \\ \therefore m\omega^2 = k$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

となる。

変位  $x$ 、速度  $v$ 、加速度  $a$  は、

$$x = A \sin(\omega t + \theta)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \theta)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \theta)$$

変位、速度、加速度が周期的に変化する運動となり、単振動となる。なお、定数  $A$  は変位  $x$  の最大値、すなわち振幅を表し、定数  $\theta$  は初期位相である。

例えば、 $t = 0$  のとき  $x = 0$  および  $v = A\omega$  な

らば、 $\theta = 2n\pi$  ( $n$  は整数) となり、

$$x = A \sin \omega t$$

$$v = A\omega \cos \omega t$$

$$a = -A\omega^2 \sin \omega t$$

あるいは、 $t = 0$  のとき  $x = A$  および  $v = 0$  ならば、

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

となり、

$$x = A \cos \omega t$$

$$v = -A\omega \sin \omega t$$

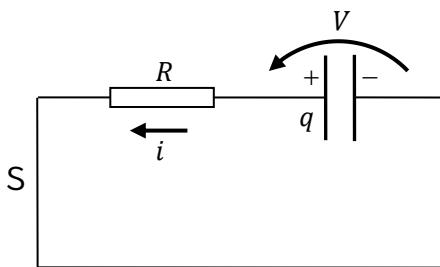
$$a = -A\omega^2 \cos \omega t$$

## 2. 微分方程式の応用例

以上の基本形は、力学現象の他にも応用することができる。

### 【応用例 1】

起電力  $E$  の電池で充電した電気容量  $C$  のコンデンサーに、抵抗  $R$  の抵抗を接続し、時刻  $t = 0$  のときスイッチ  $S$  を閉じて放電させたとする。コンデンサー両端の電位差  $V$  と、流れる電流  $i$  を時刻  $t$  の関数として表してみよう。



キルヒ霍ッフの法則より、

$$V = Ri$$

時刻  $t$  のときコンデンサーに蓄えられている電気量を  $q$  とすると、

$$q = CV$$

また、図の向きに電流  $i$  が流れると電気量  $q$  は減少するため、

$$i = -\frac{dq}{dt}$$

よって、キルヒ霍ッフの法則は、

$$\frac{q}{C} = -R \frac{dq}{dt} \quad \cdots (7)$$

となり、 $q$  についての微分方程式となる。 $t = 0$  のとき  $q = CE$  として解くと、

$$q = CE e^{-\frac{t}{RC}} \quad \cdots (8)$$

これより、 $t \rightarrow \infty$  のとき  $q \rightarrow 0$  となる。よって、 $V, i$  はそれぞれ、

$$V = \frac{q}{C} = E e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i = \frac{V}{R} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

または、

$$i = -\frac{dq}{dt} = -CE \left( -\frac{1}{RC} \right) e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$q - t$  図、 $V - t$  図、 $i - t$  図は各自で確認しておこう。

さて、以上の展開はどこかで見たことがあるだろう。そう、【基本形 1】と同じである。  
(7)式は、一次の項と一階微分の項からなる微分方程式なので、(1)式とよく似ている。

(1)式を変形すると

$$m \frac{dv}{dt} = -kv$$

$$\therefore kv = -m \frac{dv}{dt}$$

すなわち、(1)式の  $v$  に  $q$  を、 $k$  に  $\frac{1}{C}$  を、 $m$  に  $R$  をそれぞれ代入したものが(7)式である。したがって、(1)の解(2)

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

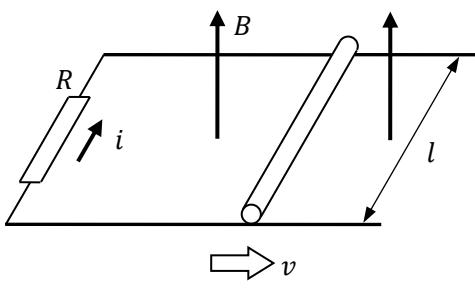
に、これらを代入し、さらに  $v$  の初期値  $v_0$  に  $q$  の初期値  $CE$  を代入すると、

$$q = CE e^{-\frac{1}{RC}t} = CE e^{-\frac{t}{RC}}$$

となり、(7)の解(8)と一致する。式が同形なら、解き方も結果も同形なのである。

## 【応用例 2】

水平面に導体のレールを幅  $l$  にして平行に置き、抵抗  $R$  の抵抗を接続し、鉛直上向きに磁束密度  $B$  の磁場を加えた。レール上に長さ  $l$ 、質量  $m$  の導体棒を置き、図の右向きに初速度  $v_0$  を与えた。導体棒の速度  $v$  を時刻  $t$  の関数として表してみよう。摩擦力や転がりについては考慮しないものとする。



速度  $v$  のとき、導体棒に生じる誘導起電力の大きさ  $V$  は、

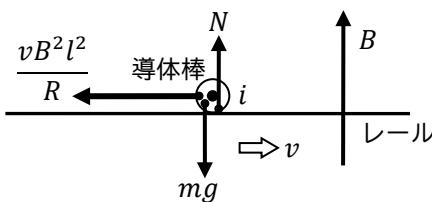
$$V = vBl$$

流れる電流の大きさ  $i$  は、

$$i = \frac{V}{R} = \frac{vBl}{R}$$

また、その向きは図に示す向きである（レンツの法則、フレミングの右手の法則、導体棒内の電子が受けるローレンツ力など）。導体棒に電流が流れるとき、フレミングの左手の法則により、磁場から左向きに力を受ける、その大きさ  $F$  は、

$$F = iBl = \frac{vBl}{R} Bl = \frac{vB^2l^2}{R}$$



図の右向きを正とすると、運動方程式は、

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{vB^2l^2}{R}$$

【基本形 1】と同じである。 $t = 0$  のとき  $v = v_0$  として解くと、

$$v = v_0 e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}$$

やはり、 $t \rightarrow \infty$  のとき  $v \rightarrow 0$  となる。

さて、この例でのエネルギーについて考察してみよう。初めに初速度  $v_0$  を与え、終端速度が 0 なので、 $\frac{1}{2}mv_0^2$  の力学的エネルギーが失われ、ジューク熱に変換されたはずである。

ジューク熱を実際に計算してみて、このことを確認してみよう。

抵抗で消費する電力  $p$  は、

$$p = R i^2$$

ここで、電流  $i$  は、

$$i = \frac{vBl}{R} = \frac{v_0Bl}{R} e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}$$

より、電力  $p$  を時刻  $t$  で表すと、

$$p = R \left( \frac{v_0Bl}{R} e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t} \right)^2 = \frac{v_0^2 B^2 l^2}{R} e^{-\frac{2B^2l^2}{mR}t}$$

導体棒に初速度を与えてから静止するまでに抵抗で発生したジューク熱  $Q$  は、

$$Q = \int_0^\infty p dt$$

と表わされるので、

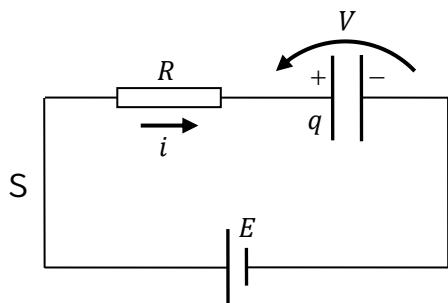
$$\begin{aligned} Q &= \int_0^\infty \frac{v_0^2 B^2 l^2}{R} e^{-\frac{2B^2l^2}{mR}t} dt \\ &= \frac{v_0^2 B^2 l^2}{R} \left[ -\frac{mR}{2B^2l^2} e^{-\frac{2B^2l^2}{mR}t} \right]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{2} m v_0^2 (e^{-\infty} - e^0) \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 \end{aligned}$$

となることが確認できた。

<演習 2-1>

電気容量  $C$  のコンデンサーと抵抗  $R$  の抵抗を直列接続した直流回路を考えてみよう。電池の内部抵抗は無視し、起電力を  $E$  とする。初めコンデンサーは充電されていないものとし、時刻  $t = 0$  のときスイッチ  $S$  を閉じて充電させたとする。

抵抗に流れる電流  $i$ 、コンデンサー両端の電位差  $V$ 、蓄えられている電気量  $q$  を、それぞれ時刻  $t$  の関数として表せ。



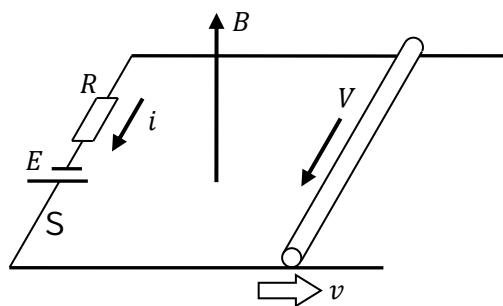
また、抵抗で消費する電力  $p$  を時刻  $t$  の関数として表し、ジュール熱  $Q$  が抵抗  $R$  に依存せず、

$$Q = \frac{1}{2} C E^2$$

となることを確かめよ。

<演習 2-2>

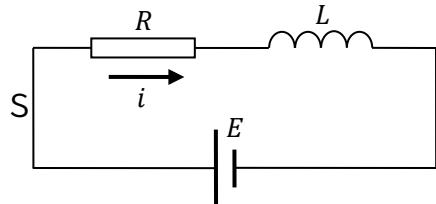
図のように、水平面に導体のレールを幅  $l$  にして平行に置き、抵抗  $R$  の抵抗、起電力  $E$  の電池、スイッチ  $S$  を接続し、鉛直上向きに磁束密度  $B$  の磁場を加えた。レール上に長さ  $l$ 、質量  $m$  の導体棒を置いて静止させ、時刻  $t = 0$  のときスイッチ  $S$  を閉じた。導体棒の速度  $v$ 、抵抗に流れる電流  $i$  を、それぞれ時刻  $t$  の関数として表せ。摩擦力や転がりについては考慮しないものとする。



### <演習 2-3>

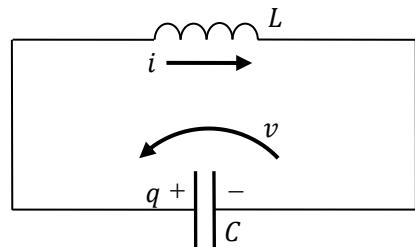
自己インダクタンス  $L$  のコイルと抵抗  $R$  の抵抗を直列接続した直流回路を考えてみよう。電池の内部抵抗は無視し、起電力を  $E$  とする。

抵抗に流れる電流  $i$  を、スイッチを閉じてからの時刻  $t$  の関数として表せ。



### <演習 2-4>

電気容量  $C$  のコンデンサーを充電し、自己インダクタンス  $L$  のコイルに接続して放電させる。このとき、図の電流  $i$  と電位差  $v$  を、時刻  $t$  の関数として表せ。ただし、電位差の最大値を  $V_0$ 、角周波数を  $\omega$ 、初期位相を  $\theta$  とする。



### <演習 2-5>

化学反応において、反応物Aのモル濃度を  $[A]$  とすると、反応速度  $v$  は、

$$v = -\frac{d[A]}{dt}$$

である。特に、

$$v = k[A] \quad (k \text{は定数, } k > 0)$$

と書けるときを 1 次反応と呼ぶ。

時刻  $t = 0$  のときのAのモル濃度を  $[A]_0$  とし、  
 $[A]$  を時刻  $t$  の関数として表せ。

### <演習 2-6>

時刻  $t$  のときの原子核数を  $N$  とすると、定数  $k (k > 0)$  を用いて、

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

と書ける。

(1) 時刻  $t = 0$  における原子核数を  $N_0$  とし、  
 $N$  を  $t$  の関数として表せ。

(2) 原子核数が  $\frac{1}{2}$  倍になる時間を半減期とい  
う。半減期  $T$  を、  
 $k$  を用いて表せ。

<演習 2-7>

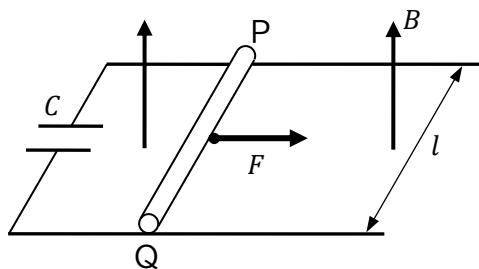
図のように、水平面に 2 本の導体のレールを幅  $l$  にして平行に置き、電気容量  $C$  のコンデンサーを接続し、鉛直上向きに磁束密度  $B$  の磁場を加えた。

レール上に長さ  $l$ 、質量  $m$  の導体棒  $PQ$  を置き、図の右向きに大きさ  $F$  の一定の力を加え続け、レールと垂直な向きを保ちながら動かした。

初めコンデンサーは充電されておらず、導体棒  $PQ$  の初速度は 0 である。

レールと  $PQ$  間の電気抵抗と摩擦力、地球磁場、コイルに流れる電流による磁場の影響は無視できるとする。また、コンデンサーの耐電圧は十分に大きいものとする。

次の手順に従って、導体棒  $PQ$  の速度  $v$  を時刻  $t$  で表せ。



(1) 時刻  $t$  のときコンデンサーに蓄えられている電気量を  $q$  とする。 $q$  を、 $C$ 、 $v$ 、 $B$ 、 $l$  を用いて表せ。

(2) 時刻  $t$  のとき  $PQ$  に流れる電流を  $i$  とする。  
導体棒  $PQ$  についての運動方程式を、 $m$ 、

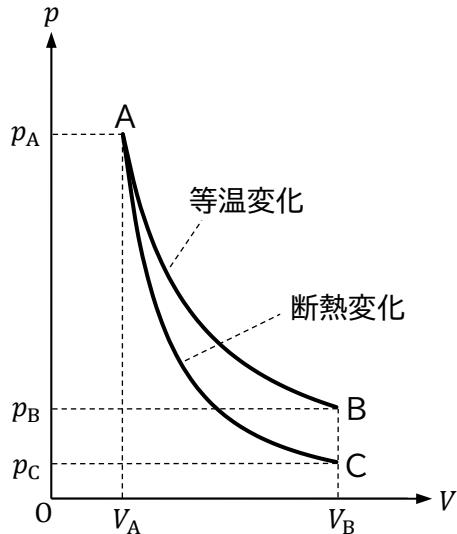
$$\frac{dv}{dt}, F, i, B, l \text{ を用いて表せ。}$$

(3)  $v$  を、 $t$ 、 $F$ 、 $m$ 、 $C$ 、 $B$ 、 $l$  を用いて表せ。

### 【応用例 3】

図のように、体積変化が等しいとき、等温変化に比べ断熱変化の方が圧力の減少が大きい。

圧力を  $p$ 、体積を  $V$  とすると、



このことは、熱力学第一法則とボイル・シャルルの法則を用いて説明することができる。

気体が外部から吸収した熱量を  $Q$ 、内部エネルギー変化を  $\Delta U$ 、気体が外部にした仕事を  $W$  とすると、熱力学第一法則は、  
断熱膨張のとき、 $Q = 0$  より、

$$0 = \Delta U + W$$

また、膨張するときは、

$$W > 0$$

より、

$$\Delta U < 0$$

すなわち、温度変化  $\Delta T$  は、

$$\Delta T < 0$$

となり、断熱膨張の時は温度が下降する。

さて、上図において過程 A → B は等温変化、過程 A → C は断熱変化である。状態 A および B の温度を  $T_A$ 、状態 C の温度を  $T_C$  とすると、ボイル・シャルルの法則より、

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_B V_B}{T_A} = \frac{p_C V_B}{T_C}$$

$$\therefore T_C = \frac{p_C}{p_B} T_A$$

ここで、断熱膨張では  $\Delta T < 0$  であることから、

$$T_C < T_A$$

となるが、これを満たすには、

$$p_C < p_B$$

でなければならない。すなわち、体積変化が等しいとき、等温変化に比べ断熱変化の方が圧力の減少が大きい。

以上の説明では、なぜ  $p$  -  $V$  グラフが図のような曲線になるのか不明のままである。

そこで、断熱変化における  $p$  と  $V$  の関係式を導いてみよう。

熱力学第一法則より、

$$Q = \Delta U + W$$

断熱変化では  $Q = 0$  なので、

$$0 = \Delta U + W$$

体積変化が微小のときは定圧変化とみなせるので、

$$W = p\Delta V$$

また、定積モル比熱を  $C_V$ 、物質量を  $n$  とする

$$\Delta U = nC_V\Delta T$$

より、熱力学第一法則は

$$0 = nC_V\Delta T + p\Delta V$$

と書ける。これは、

$$0 = nC_VdT + pdV$$

と書いても同じことである。よって、

$$dT = -\frac{p}{nC_V}dV \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで、気体定数を  $R$  とすると、理想気体の状態方程式より、

$$pV = nRT$$

両辺を温度  $T$  で微分すると、

$$\frac{dp}{dT}V + p\frac{dV}{dT} = nR$$

$$\therefore Vdp + pdV = nRdT \quad \dots \textcircled{2}$$

①式を②式に代入すると、

$$Vdp + pdV = nR\left(-\frac{p}{nC_V}dV\right)$$

$$\therefore Vdp = -p \left(1 + \frac{R}{C_V}\right) dV \quad \dots \textcircled{3}$$

となり、断熱変化における熱力学第一法則は  $p, V$  についての微分方程式となる。

ここで、定圧モル比熱を  $C_p$  とすると、

$$1 + \frac{R}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = \frac{C_p}{C_V}$$

となり、

$$\frac{C_p}{C_V} = \gamma$$

とおくと、 $\textcircled{3}$  式は、

$$Vdp = -p\gamma dV$$

$$\therefore \frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}$$

$$\therefore \int \frac{dp}{p} = -\gamma \int \frac{dV}{V}$$

$$\therefore \log p = -\gamma \log V + D \quad (D \text{ は定数})$$

$$\therefore \log p + \log V^\gamma = D$$

$$\therefore \log pV^\gamma = D$$

$$\therefore pV^\gamma = e^D$$

$$\therefore pV^\gamma = \text{一定} \quad (\text{ポアソンの式})$$

単原子分子理想気体の場合、

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3}$$

より、

$$pV^{\frac{5}{3}} = \text{一定}$$

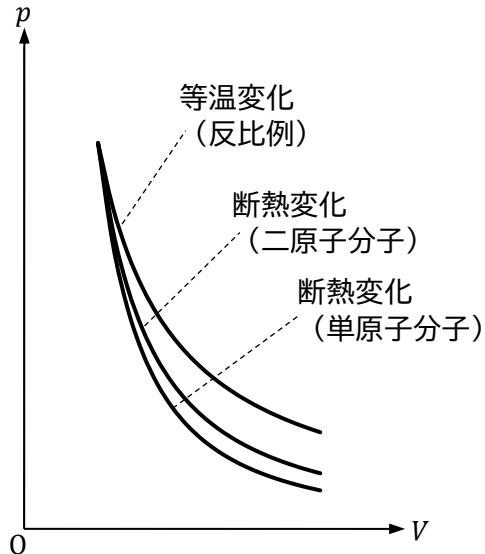
また、二原子分子理想気体の場合、

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5}$$

より、

$$pV^{\frac{7}{5}} = \text{一定}$$

これらの式をグラフ化すると次のようになる。



<別解>  
状態方程式

$$pV = nRT$$

より、

$$p = \frac{nRT}{V}$$

これを $\textcircled{1}$ 式に直接代入して、

$$dT = -\frac{1}{nC_V} \cdot \frac{nRT}{V} dV$$

$$\therefore \frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V} \cdot \frac{dV}{V} \quad \dots \textcircled{4}$$

これを $T, V$ の微分方程式として解くと、

$$TV^{\gamma-1} = \text{一定}$$

となる。

改めて、状態方程式より

$$T = \frac{pV}{nR}$$

$$\therefore \frac{pV}{nR} V^{\gamma-1} = \text{一定}$$

$$\therefore pV^\gamma = \text{一定}$$

### 3. 空気抵抗力を受ける落体の速さの測定実験

#### 3-1 目的

アクリルパイプ内を初速度0m/sで落下する発泡スチロール球の速さ $v$ [m/s]を測定し,  $v - y$ 図と $v - t$ 図を作成する。(y: 落下距離[m], t: 時刻[s])

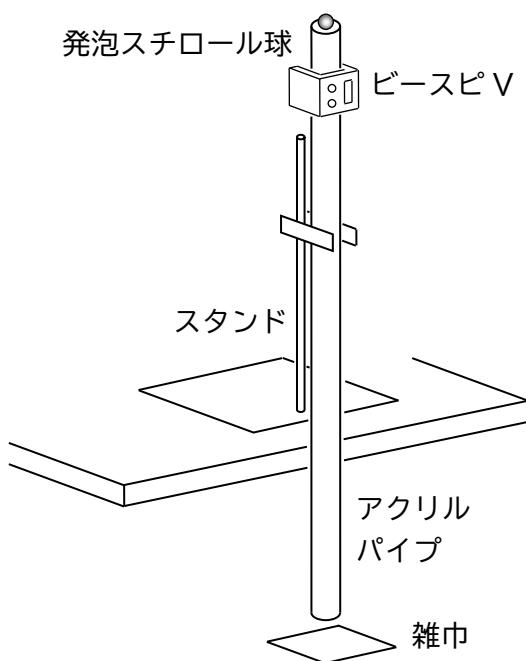
#### 3-2 方法

##### (1) 準備

発泡スチロール球 または,  
発泡スチロール球殻 (直径約25mm)  
(非弾性球)  
ビースピ<sup>o</sup>V (速度測定器)  
アクリルパイプ  
スタンド  
電子天秤  
パソコン  
雑巾

##### (2) 実験器具の設置

図のように設置する。スタンドでアクリルパイプを挟み, 鉛直になるように慎重に調整する。



##### (3) 理論

<演習1-2>より, 位置を $y$ [m], 速度を $v$ [m/s], 終端速度を $v_t$ [m/s], 重力加速度の大きさを $g$ [m/s<sup>2</sup>]とすると, 時刻 $t$ [s]は,

$$t = \frac{y}{v_t} + \frac{v}{g}$$

である。

##### (4) 手順

###### ① 質量 $m$ [g]の測定

実験に用いる発泡スチロール球の質量を, 電子天秤を用いて0.01gの桁まで測定する。

###### ② $v - y$ 図の作図

位置 $y$ のときの速度 $v$ を測定する。

まず, ビースピ<sup>o</sup>Vを $y = 0.10$ mの位置にはめ込む。球の中心がアクリルパイプの上端と同じ高さになるように持ち, 静かに手を放す。球に初速度を与えてしまったり, 球がアクリルパイプの内壁に触れたりしたらやり直す。 $y = 0.10$ mでの速さの測定を3回行い記録しておく(処理をする際にはこれらの平均値を用いる)。

$y$ を0.10mずつ変化させながら同様に測定し,  $y = 2.00$ mまで行う。

以上の結果をグラフ化したもの( $v - y$ 図)から終端速度 $v_t$ を推定する。

###### ③ $v - t$ 図の作図

(3)の式から, 位置 $y$ , 速度 $v$ のときの時刻 $t$ を計算し, その値を横軸にとりグラフ化する。

###### ④ 非弾性球の落下速度の測定

時間があれば, 非弾性球についても同様に測定し,  $v - y$ 図と $v - t$ 図を作成する。

##### (5) 処理

表計算ソフトのExcelを利用してグラフ化と指數関数へのあてはめを行う。

## 【Excelでの処理】

- ① Excel を起動する。
- ② セル A1 から F1 までそれぞれラベル「t」 「y」 「v1」 「v2」 「v3」 「v」 を、 C2 から E2 まで数値「0」を入力する。いずれも半角英数である。次に、 B2 から B22 までにそれぞれ数値「0」から「2」までを 0.1m 刻みで入力する。次のようにすると速く入力できる。B2 と B3 にそれぞれ「0」 「0.1」を入力する。

t	y	v1	v2	v3	v
2	0	0	0	0	0
3	0.1				
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					

B2 と B3 を選択し、カーソルを B3 の右下に移動する。カーソルの形が「+」になる。

t	y	v1	v2	v3	v
2	0	0	0	0	0
3	0.1				
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					

B22 まで下方にドラッグすれば自動的に数値が入力される。

t	y	v1	v2	v3	v
2	0	0	0	0	0
3	0.1				
4	0.2				
5	0.3				
6	0.4				
7	0.5				
8	0.6				
9	0.7				
10	0.8				
11	0.9				
12	1				
13	1.1				
14	1.2				
15	1.3				
16	1.4				
17	1.5				
18	1.6				
19	1.7				
20	1.8				
21	1.9				
22	2				
23					
24					

## ③ C3 から E22 まで測定結果を入力する。

t	y	v1	v2	v3	v
2	0	0	0	0	0
3	0.1	1.11	1.12	1.14	
4	0.2	1.44	1.39	1.45	
5	0.3	1.6	1.63	1.55	
6	0.4	1.71	1.67	1.65	
7	0.5	1.81	1.81	1.8	
8	0.6	1.91	1.88	1.88	
9	0.7	1.94	2	1.96	
10	0.8	2	2	2.03	
11	0.9	2.04	2.04	2.03	
12	1	2.02	2.09	2.03	
13	1.1	2.05	2.11	2.11	
14	1.2	2.15	2.16	2.13	
15	1.3	2.22	2.11	2.16	
16	1.4	2.18	2.16	2.15	
17	1.5	2.23	2.15	2.23	
18	1.6	2.21	2.18	2.18	
19	1.7	2.21	2.14	2.16	
20	1.8	2.24	2.25	2.28	
21	1.9	2.28	2.29	2.34	
22	2	2.31	2.28	2.37	
23					
24					

- ④ 測定した速さの平均値を計算し、 F2 から F22 まで入力する。まず、 F2 に 「=AVERAGE(C2:E2)」 と入力する。

t	y	v1	v2	v3	v
2	0	0	0	0	0=AVERAGE(C2:E2)
3	0.1	1.11	1.12	1.14	
4	0.2	1.44	1.39	1.45	
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					

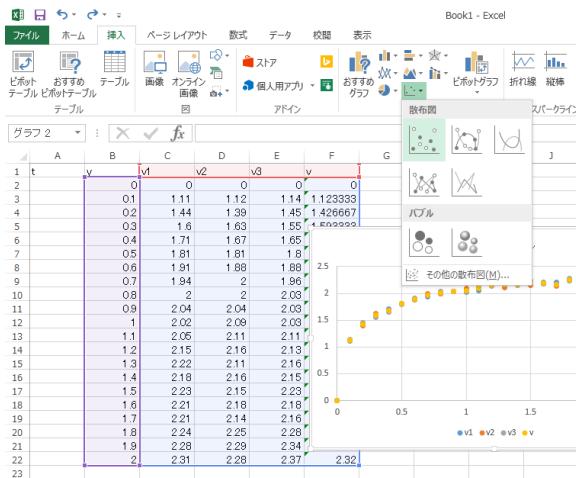
F2 を選択し、カーソルを F2 の右下に移動する。カーソルの形が「+」になる。

t	y	v1	v2	v3	v
2	0	0	0	0	0
3	0.1	1.11	1.12	1.14	
4	0.2	1.44	1.39	1.45	
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					

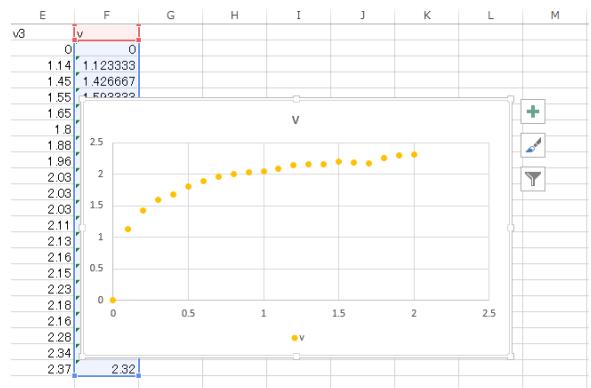
F22 まで下方にドラッグすれば自動的に計算式が入力され、計算結果が表示される。

t	y	v1	v2	v3	v
2	0	0	0	0	0
3	0.1	1.11	1.12	1.14	1.123333
4	0.2	1.44	1.39	1.45	1.426667
5	0.3	1.6	1.63	1.55	1.593333
6	0.4	1.71	1.67	1.65	1.676667
7	0.5	1.81	1.81	1.8	1.806667
8	0.6	1.91	1.88	1.88	1.89
9	0.7	1.94	2	1.96	1.966667
10	0.8	2	2	2.03	2.01
11	0.9	2.04	2.04	2.03	2.036667
12	1	2.02	2.09	2.03	2.046667
13	1.1	2.05	2.11	2.11	2.09
14	1.2	2.15	2.16	2.13	2.146667
15	1.3	2.22	2.11	2.16	2.163333
16	1.4	2.18	2.16	2.15	2.163333
17	1.5	2.23	2.15	2.23	2.203333
18	1.6	2.21	2.18	2.18	2.19
19	1.7	2.21	2.14	2.16	2.17
20	1.8	2.24	2.25	2.28	2.256667
21	1.9	2.28	2.29	2.34	2.303333
22	2	2.31	2.28	2.37	2.32
23					
24					

⑤ B1 から F22 までを選択し、「挿入」タブの「散布図」の左上のアイコンを選択する。



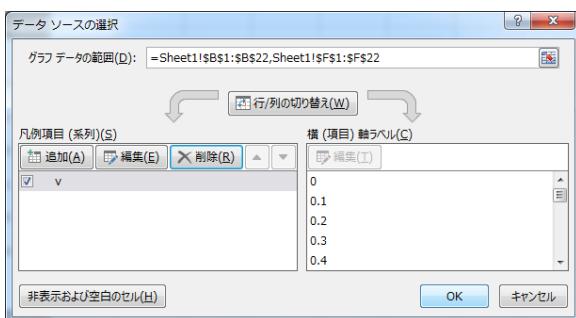
⑦ これで  $v - y$  図ができた。これより終端速度  $v_t$  を読み取る（図の例では  $v_t = 2.4 \text{m/s}$  とする）。



⑥ 余分な情報を表示しないように設定する。  
「デザイン」タブの「データの選択」アイコンを選択する。



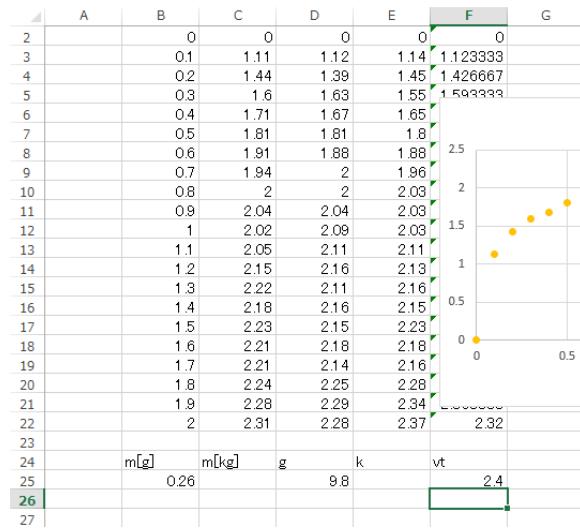
「データソースの選択」で「×削除」ボタンを 3 回押し、データ系列から v1, v2, v3 を削除し、「OK」ボタンを押す。



⑧ 続いて、 $v-t$ 図を作成する。

B24 から F24 までそれぞれラベル「m[g]」

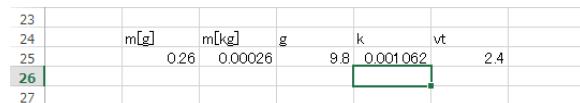
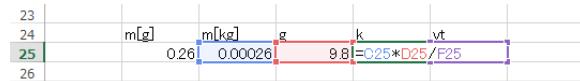
「m[kg]」「g」「k」「vt」を入力する。B25 に電子天秤で測定した発泡スチロール球の質量（図の例では「0.26」g）を、D25 に重力加速度の大きさ「9.8」m/s<sup>2</sup>を、F25 に $v-y$ 図から読み取った終端速度（図の例では「2.4」m/s）をそれぞれ入力する。



⑨ 発泡スチロール球の質量 $m[\text{kg}]$ と空気抵抗の係数 $k[\text{kg}/\text{s}]$ を計算する。まず、C25 に「=0.001\*B25」と入力する。

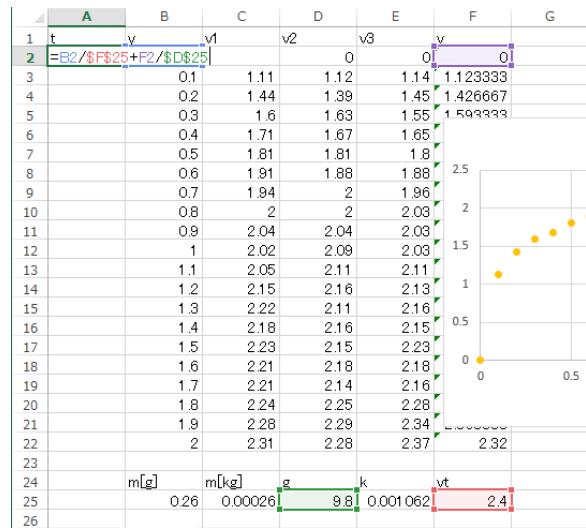


次に、E25 に「=C25\*D25/F25」と入力する。

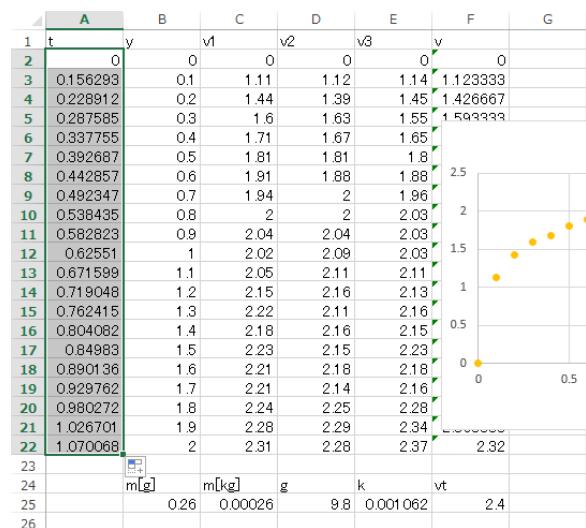


⑩ それぞれの位置のときの時刻 $t$ を計算し、A2 から A22 まで入力する。まず、A2 に「=B2/\$F\$25+F2/\$D\$25」と入力する

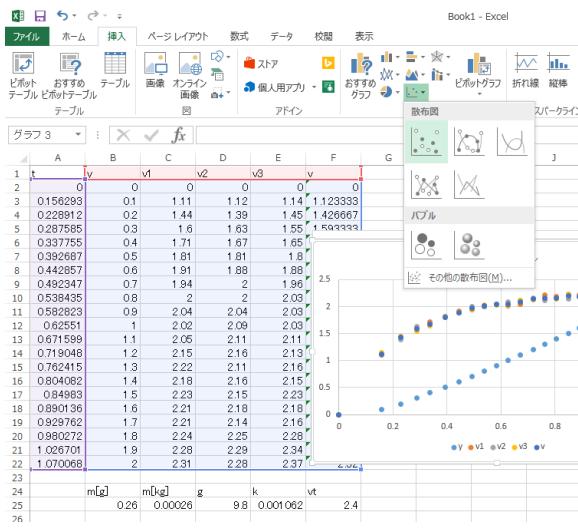
（これは(3)の式  $t = \frac{y}{v_t} + \frac{v}{g}$  を反映したものである）。



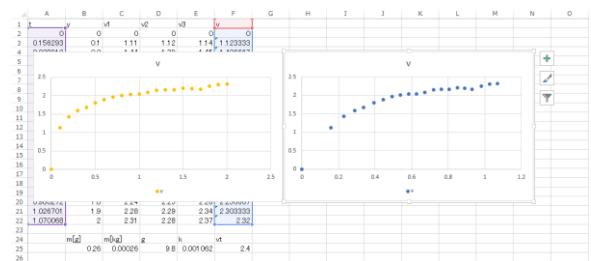
A2 を選択しカーソルを A2 の右下に移動すると、カーソルの形が「+」になるので、そのまま A22 まで下方にドラッグすれば自動的に計算式が入力され、計算結果が表示される。



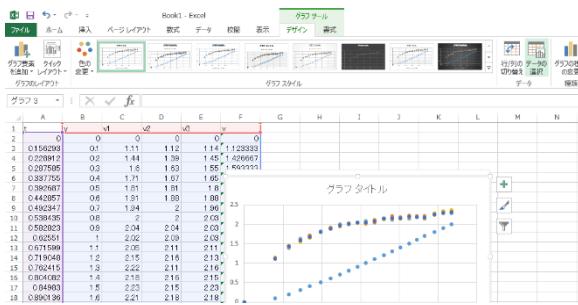
⑪ A1 から F22 までを選択し、「挿入」タブの「散布図」の左上のアイコンを選択する。



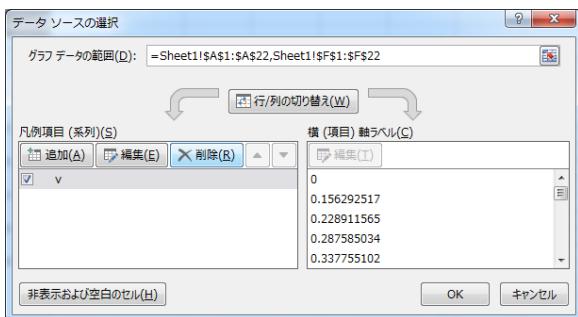
⑬ これで  $v - t$  図が完成した。



⑫ 余分な情報を表示しないように設定する。  
「デザイン」タブの「データの選択」アイコンを選択する。



「データソースの選択」で「×削除」ボタンを 4 回押し、データ系列から y, v1, v2, v3 を削除し、「OK」ボタンを押す。



### 3-3 結果

発泡スチロール球

$t$ [s]	$y$ [m]	$v_1$ [m/s]	$v_2$ [m/s]	$v_3$ [m/s]	$v$ [m/s]
0.00					
0.10					
0.20					
0.30					
0.40					
0.50					
0.60					
0.70					
0.80					
0.90					
1.00					
1.10					
1.20					
1.30					
1.40					
1.50					
1.60					
1.70					
1.80					
1.90					
2.00					

非弾性球

$t$ [s]	$y$ [m]	$v_1$ [m/s]	$v_2$ [m/s]	$v_3$ [m/s]	$v$ [m/s]
0.00					
0.10					
0.20					
0.30					
0.40					
0.50					
0.60					
0.70					
0.80					
0.90					
1.00					
1.10					
1.20					
1.30					
1.40					
1.50					
1.60					
1.70					
1.80					
1.90					
2.00					

$$m = \text{g}, \quad m = \text{kg}$$

$$g = 9.80 \text{m/s}^2$$

$$k = \text{kg/s}, \quad v_t = \text{m/s}$$

### 3-4 考察

- ・ うまくいかなかった場合、その理由を考えてみよう。また、それを解決するための実験方法を考えてみよう。
- ・ 発泡スチロール球と非弾性球のグラフの違いについて整理しよう。
- ・ 空気抵抗力や、その比例定数  $k$  はどんな物理量に依存するか考えてみよう。

## 4. コンデンサーの放電実験

### 4-1 目的

コンデンサーを放電するとき、両端の電位差  $V[V]$  が、指数関数

$$V = E e^{-\frac{t}{RC}}[V]$$

( $E$ : 充電した時の電位差 [V],  $C$ : 電気容量 [F],  
 $R$ : 抵抗 [ $\Omega$ ],  $t$ : 時刻 [s])  
 で表わされることを検証する。

### 4-2 方法

#### (1) 準備

コンデンサー ( $C = 1.0F$ )

抵抗  $22\Omega$

$68\Omega$  … 青灰黒

$2.0 \times 10^2\Omega$  … 赤黒茶

ミノムシクリップ4本

単三乾電池2本

電池ボックス

ストップウォッチ

直流電圧計

パソコン

#### (2) 手順

##### ① 充電

コンデンサーは極性があるので注意する。灰色の帯に「-」と書いてある側が-である。図1のように接続し、2分以上待つ。

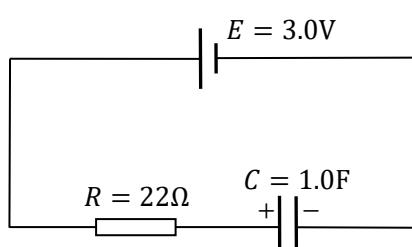
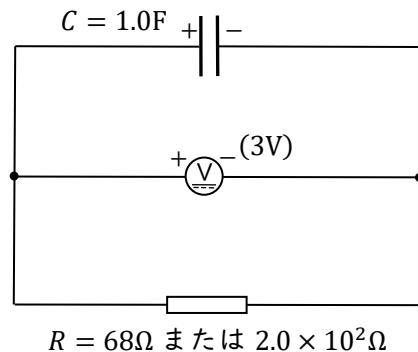


図1 充電時の回路

#### ② 放電

図2のように接続する。接続が完成した瞬間にストップウォッチをオンにする。以後、10sごとに電位差を3分間（時間があれば5分間）測定する。



$R = 68\Omega$  または  $2.0 \times 10^2\Omega$

図2 放電時の回路

③ 再度充電する。①と同様。

④ 抵抗を取り替えて放電させる。②と同様。

#### (3) 理論

【応用例1】より、コンデンサー両端の電位差 [V] は、

$$V = E e^{-\frac{t}{RC}}[V]$$

この実験では、 $C = 1.0F$ ,  $E = 3.0V$ だから、 $R = 68\Omega$ のときの理論値は、

$$V = E e^{-\frac{t}{RC}} = 3.0 e^{-\frac{t}{68 \times 1.0}} = 3.0 e^{-0.015t}[V]$$

同様に、 $R = 2.0 \times 10^2\Omega$ のときは、

$$V = E e^{-\frac{t}{RC}} = 3.0 e^{-\frac{t}{2.0 \times 10^2 \times 1.0}} = 3.0 e^{-0.0050t}[V]$$

#### (4) 処理

表計算ソフトの Excel を利用してグラフ化と指数関数へのあてはめを行う。

## 【Excelでの処理】

- ① Excel を起動する。
- ② セル A1 と B1 にそれぞれラベル「t」「v」を、A2 から A19 までにそれぞれ数値「10」から「180」までを 10s 刻みで入力する。いずれも半角英数である。  
なお、次のようにすると速く入力できる。  
A2 と A3 にそれぞれ「10」「20」を入力する。

A	B	C	D	E
1 t	v			
2 10				
3 20				
4				
5				

A2 と A3 を選択しカーソルを A3 の右下に移動する。カーソルの形が「+」になる。

A	B	C	D	E
1 t	v			
2 10				
3 20				
4				
5				

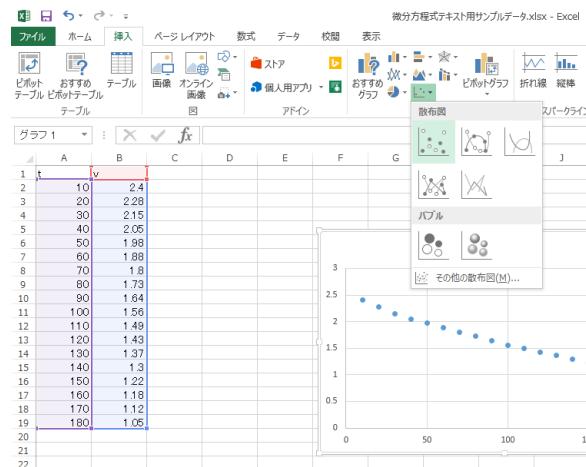
A19 まで下方にドラッグすれば自動的に数値が入力される。

A	B	C	D	E
1 t	v			
2 10				
3 20				
4 30				
5 40				
6 50				
7 60				
8 70				
9 80				
10 90				
11 100				
12 110				
13 120				
14 130				
15 140				
16 150				
17 160				
18 170				
19 180				
20				
21				

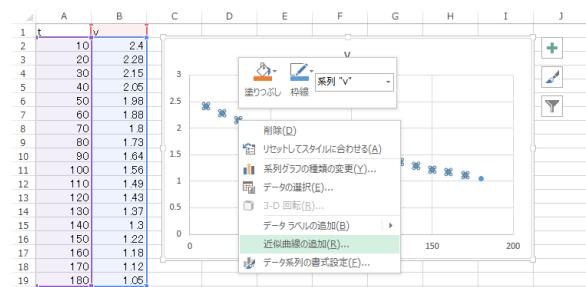
## ③ B2 から B19 まで測定結果を入力する。

A	B	C	D	E
1 t	v			
2 10	2.4			
3 20	2.28			
4 30	2.15			
5 40	2.05			
6 50	1.98			
7 60	1.88			
8 70	1.8			
9 80	1.73			
10 90	1.64			
11 100	1.56			
12 110	1.49			
13 120	1.43			
14 130	1.37			
15 140	1.3			
16 150	1.22			
17 160	1.18			
18 170	1.12			
19 180	1.05			
20				
21				

## ④ A1 から B19 までを選択し、「挿入」タブの「散布図」の左上のアイコンを選択する。



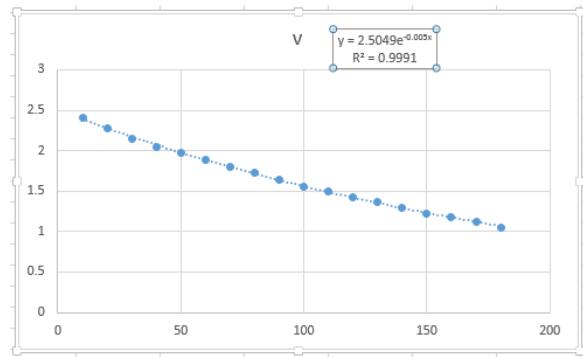
## ⑤ グラフに表示されたいずれかの点上で右クリックし、「近似曲線の追加」を選択する。



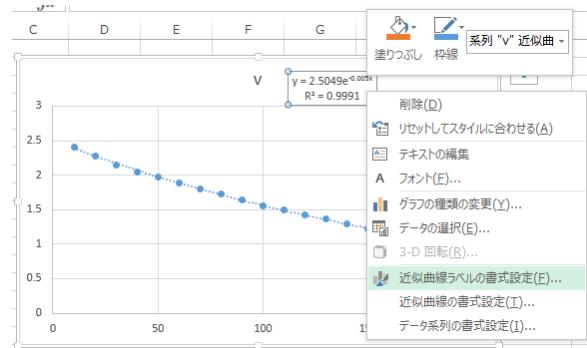
⑥ 「指数近似」を選択し、「グラフに数式を表示する」「グラフにR-2乗値を表示する」にチェックして「閉じる」。



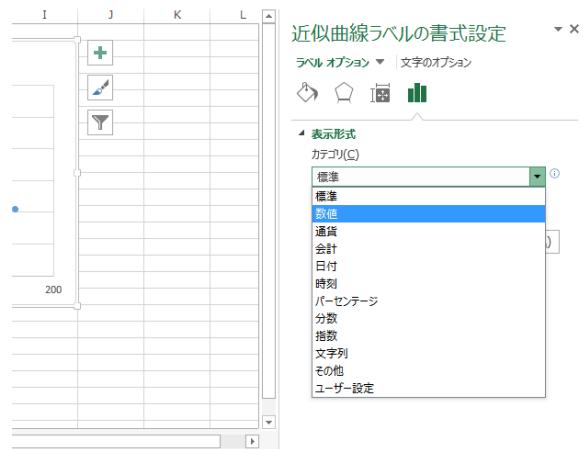
⑦ 表示された数式を見やすい位置に移動する。



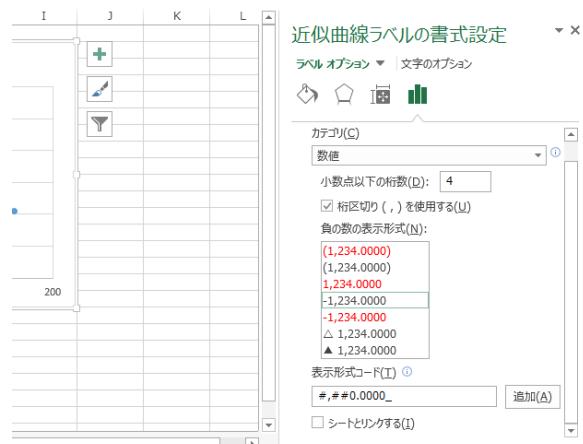
このままでは、指数の桁が少なく表示されているので、次のような操作をする。カーソルを数式の上に移動し右クリックし、「近似曲線ラベルの書式設定」を選択する。



表示形式のカテゴリで「数値」を選択する。



小数点以下の桁数に「4」を入力し、負の数の表示形式は「-1,234.0000」を選択する。



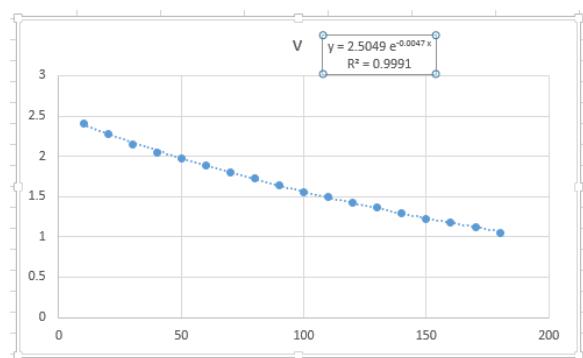
⑧ 表示された数式から、電位差の最大値 $E$ と  
指数 $-\frac{t}{RC}$ を読み取って記録する。グラフで  
は電位差 $V$ は「 $y$ 」、指数 $-\frac{t}{RC}$ は「 $- (数値) x$ 」  
と表示されるので、図の例では

$$E = 2.5V$$

$$-\frac{t}{RC} = -0.0047t$$

$$\therefore V = 2.5e^{-0.0047t} [V]$$

である。なお、 $R^2$ は関数への当てはめの割合を表す数値で、 $R^2$ が1に近いほど、結果がよりその関数（この場合は指数関数）に近いことを表す。



⑦ 以上の処理を $68\Omega$ の場合と $2.0 \times 10^2\Omega$ の場合について行う。時間があれば 2 つのグラフを見やすく配置し、体裁を整える。

### 4-3 結果

$$R = 68\Omega$$

$t[\text{s}]$	$V[\text{V}]$	$t[\text{s}]$	$V[\text{V}]$
10		160	
20		170	
30		180	
40		190	
50		200	
60		210	
70		220	
80		230	
90		240	
100		250	
110		260	
120		270	
130		280	
140		290	
150		300	

測定値 ( $t[\text{s}]$ の関数で書く)

$$V =$$

$$R = 2.0 \times 10^2 \Omega$$

$t[\text{s}]$	$V[\text{V}]$	$t[\text{s}]$	$V[\text{V}]$
10		160	
20		170	
30		180	
40		190	
50		200	
60		210	
70		220	
80		230	
90		240	
100		250	
110		260	
120		270	
130		280	
140		290	
150		300	

測定値 ( $t[\text{s}]$ の関数で書く)

$$V =$$

#### 4-4 考察

- ・ 理論値と測定値を比較してみよう。
- ・  $68\Omega$ の抵抗で放電させたときと,  $2.0 \times 10^2\Omega$ の抵抗で放電させたときの結果をまとめ, その理由を考えてみよう。

## 5. 微分方程式の数値解

いくつかの物理現象について微分方程式を用いて考察してきたが、これまでに取り扱った微分方程式は、高等学校の数学の知識を応用すれば解くことができるものであった。

ここでは、高校数学では解けない複雑な微分方程式の解を、数値計算によって求める方法（オイラー法）を紹介しよう。

時刻  $t$  での速度を  $v$  とすると、運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

より、

$$dv = \frac{F}{m} dt$$

となる。これは、微小時間間隔  $dt$  の間に、速度が  $\frac{F}{m} dt$  だけ変化することを意味している。したがって、時刻  $t$  の  $dt$  後の速度は、

$$v + dv = v + \frac{F}{m} dt$$

となる。

また、時刻  $t$  における位置を  $x$  とすると、

$$v = \frac{dx}{dt}$$

より、

$$dx = v dt$$

となるので、時刻  $t$  の  $dt$  後の位置は、

$$x + dx = x + v dt$$

となる。

これらの速度と位置の数値を用いて、さらに  $dt$  後の速度と位置を計算して、その数値を用いてさらにその  $dt$  後の速度と位置を計算し…。

すなわち、次の瞬間の速度と位置を、逐次数値計算していくことで物体の軌道を決めることができるのである。

ただし、この方法では、本来、限りなく 0 に近いはずの  $dt$  に数値を代入してしまうため、正確な解は得られない（厳密には上記の微小時間間隔は有限の値のため、 $dt$  ではなく  $\Delta t$  と書くべきである）。数値計算で微分方程式の解を求めるときは、 $dt$  をなるべく小さい数値に設定すると、解析的に求めた解（解析解）に近い値が得られる。

以下は、その数値計算を、表計算ソフト Excel を利用してやってみよう。

### 例 等加速度直線運動

まず、微分方程式が簡単な等加速度直線運動を考えてみよう。ここでは、

加速度  $\frac{F}{m} = 1$

微小時間間隔  $dt = 0.1$

初速度  $v_0 = 0$

初期位置  $x_0 = 0$

とする。

#### 【Excel での処理】

- (1) Excel を起動する。
- (2) 初期条件とラベルを入力する。全て半角英数で入力する。

1	F/m	1			
2	dt	0.1			
3	v0	0			
4	x0	0			
5					
6	t	dv	v	dx	x
7	0				
8					

- (3) 数値計算の表を作成する。

- ① ラベル下の 1 行目に、時刻・速度・位置の初期値を入力する。

- ・ 時刻の初期値は 0 とする。
- ・ 速度と位置の初期値は、初期条件のセルを参照する。このようにすれば、後で初期値を変更したときに表に反映される。

1	F/m	1			
2	dt	0.1			
3	v0	0			
4	x0	0			
5					
6	t	dv	v	dx	x
7	0				
8					

② 初期値を入力した行の下の行に数式を入力する。

A	B	C	D	E	F
1	F/m	1			
2	dt	0.1			
3	v0	0			
4	x0	0			
5					
6	t	dv	v	dx	x
7	0	0.1	0.1	0.01	0
8	0.1	0.1	0.1	0.01	0.01
9					

前の時刻に  $dt$  を足せばよいので  
「=A7+\$B\$2」を入力

前の  $v$  に  $dv$  を足せばよいので  
「=C7+B8」を入力

前の  $x$  に  $dx$  を足せばよいので  
「=E7+D8」を入力

運動方程式より  
 $dv = (F/m) dt$  なので  
「=\$B\$1\*\$B\$2」を入力  
このセルに入力する数式は運動方程式の形に応じて決まる

(したがって他の運動を考えるときは、このセルへの入力を変更すればよい)

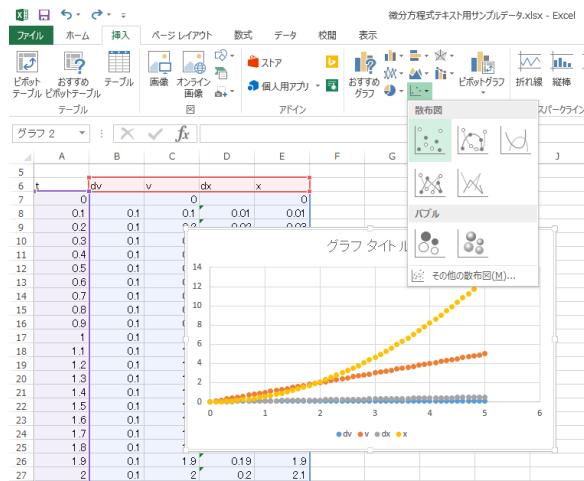
③ 数式を入力した行（例では 8 行目）の時刻  $t$  から位置  $x$  までのセルを選択し、50 行くらいコピーする（何行コピーしてもよい）。

次のように操作すると楽である。カーソルを範囲の右下に移動すると「+」の形になるので、その地点から下方にドラッグする。

A	B	C	D	E	F
1	F/m	1			
2	dt	0.1			
3	v0	0			
4	x0	0			
5					
6	t	dv	v	dx	x
7	0	0.1	0.1	0.01	0
8	0.1	0.1	0.1	0.01	0.01
9					

(4)  $v - t$  グラフを作成する。

① 数値の表をラベルから最下行まで選択し、「挿入」タブの「散布図」の左上のアイコンを選択する。

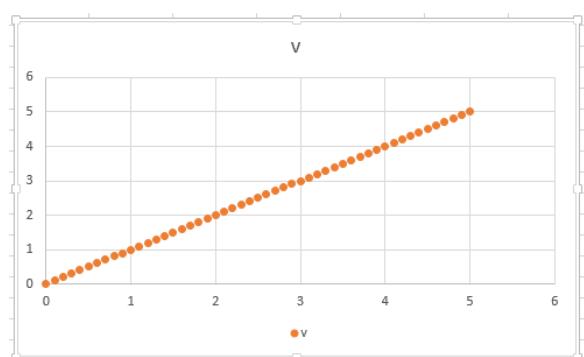
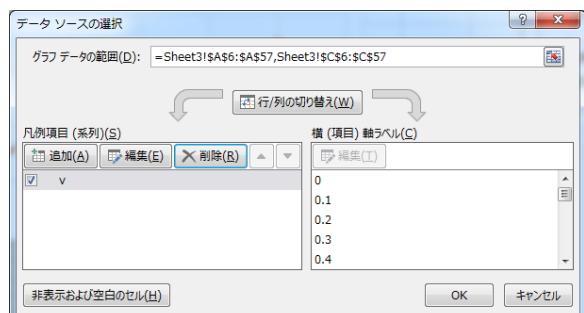


② 不要なグラフを削除する。

まず、「デザイン」タブの「データの選択」アイコンを選択する。



「v」以外を削除する。



③好みに合わせて軸やデータ系列の書式を変更する。

(5)  $x-t$  グラフを作成する。(4)と同様だが、系列タブは「 $x$ 」以外を削除する。

(6) 初期条件を変更してみて、いろんなパターンのグラフを見てみよう。

#### <演習 5-1>

空気抵抗を受けて落下する物体の  $v-t$  グラフと  $x-t$  グラフを描け。ただし、 $t=0$  のとき、 $v=0$  および  $x=0$  とする。

ヒント：セル B8 の数式を考えよ。

#### <演習 5-2>

ばね振り子の  $v-t$  グラフと  $x-t$  グラフを描け。

#### <演習 5-3>

空気抵抗を受けるばね振り子の  $v-t$  グラフと  $x-t$  グラフを描け。

#### <演習 5-4>

単原子分子理想気体の断熱変化の  $p-V$  グラフを描け。また、数値計算によるグラフと解析解のグラフを比較せよ。

#### <演習 5-5>

化学反応において、反応物Aのモル濃度を  $[A]$  とすると、反応速度  $v$  が、

$$v = k[A]^2 \quad (k \text{は定数, } k > 0)$$

と書けるときを2次反応と呼ぶ。このとき、

$$-\frac{d[A]}{dt} = k[A]^2$$

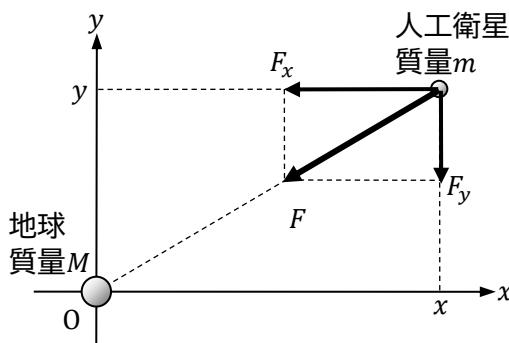
である。2次反応における  $[A]-t$  図を描け。

### <演習 5-6>

地球から万有引力を受けて運動する人工衛星の軌道を描け。

ただし、話を簡単にするため、以下のように考えてよい。

- ・ 地球は人工衛星に比べてはるかに質量が大きいため、原点Oに固定してよい。
- ・ 人工衛星の軌道はxy平面内で行われるとし、軌道はy-xグラフとして表現せよ。
- ・ 軌道の形がわかれればよいので、万有引力定数、地球の質量、初速度、初期位置などは、正確な数値でなくてもよい。



万有引力の法則より、

$$F = G \frac{Mm}{r^2} = G \frac{Mm}{x^2 + y^2}$$

成分に注目すると、万有引力のx成分は、

$$F_x = -G \frac{Mm}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

なので、運動方程式は、

$$m \frac{dv_x}{dt} = -G \frac{Mm}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

よって、

$$dv_x = -GMx(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dt$$

同様に、

$$dv_y = -GMy(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dt$$

となる。

ヒント：

- ・  $x$ 成分、 $y$ 成分について考える必要があるので、表で必要な数値の項目は、 $t, dv_x, v_x, dx, x, dv_y, v_y, dy, y$ である。グラフ化するときは $x$ の列から $y$ の列までを選択し、 $dv_y, v_y, dy$ の系列を削除する。
- ・ 行数を多くする。例えば $dt = 0.05$ の場合は1000行くらいが目安。

1	GM	10							
2	dt	0.05							
3	vx0	0							
4	x0	5							
5									
6	t	dvx	vx	dx	x	dvy	vy	dy	v
7		0	0	0	5	1			0
8									

軌道(y-xグラフ)が完成したら、初期条件を変更してみよう。

### <演習 5-7>

最後は、生物分野における微分方程式の応用を考えてみよう。

ここで取り上げるのはロトゥカ・ボルテラ方程式と呼ばれるもので、捕食者と被食者の増減関係を単純化して表した微分方程式である。生態系における生物の個体数をモデル化することができる。

例えば被食者をワカサギ、捕食者をオオクチバス（一般にはブラックバスと呼ばれる）としてみよう。

$x$ ：ワカサギの個体数

$y$ ：オオクチバスの個体数

とすると、ワカサギの増殖速度は、

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

と書ける。 $\alpha x$ はワカサギの個体数が自然に増加することを、 $-\beta xy$ はオオクチバスに捕食されることによって減少することを表現したものである。

また、オオクチバスの増殖速度は、

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy$$

と書ける。 $-\gamma y$ はオオクチバスの個体数が自然に減少することを、 $\delta xy$ はワカサギを捕食することによって増加することを表現したものである。

横軸に時刻 $t$ をとり、ワカサギの個体数 $x$ とオオクチバスの個体数 $y$ を一つのグラフに表せ。さらに、ワカサギ、オオクチバスともに絶滅しないような定数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 、及びそれぞれの個体数の初期値 $x_0, y_0$ を見つけよ。

## 6. 参考文献

東京理科大学理学部第二部物理学教室. 物理学実験 入門編. 内田老鶴園. 2008.

野崎亮太. 道具としての微分方程式. 日本実業出版社. 2004.

山本義隆. 増補改訂版 新・物理入門. 駿台文庫. 2004.

河合塾物理科. 物理教室 改訂版. 河合出版. 2004.

田原真人. 微積で楽しく高校物理がわかる本. 秀和システム. 2006.

ト部 吉庸. 理系大学受験 化学の新研究. 三省堂. 2013.

