gの測定を題材とした誤差の処理　～物理チャレンジに向けて～

1　目的

力学台車が斜面上を運動する時間を測定し，重力加速度の大きさgを求める。

2　方法

＜準備＞ 滑走台，力学台車，ストップウォッチ，定規，水準器，PC など

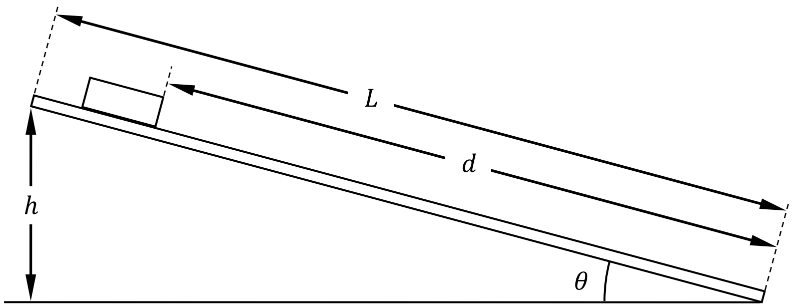
　力学台車を斜面上で静かに放し, ある距離を運動する時間tをストップウォッチで測定する。これをn回繰り返す。nは最低でも10とすること。具体的な実験方法は自分たちで考えよ。

3　仮説

　重力加速度の大きさをg，力学台車が斜面上を運動した距離をd，時間をt，斜面の水平からの角をθとすると，等加速度運動の公式より,

$$d = \frac{1}{2} \cdot (g \sin\theta) \cdot t^2$$

ここで，角θよりも斜面の長さLと高さhを用いた方が測りやすいので,



$$\sin\theta = \frac{h}{L}$$

$$\therefore d = \frac{1}{2} \cdot \frac{gh}{L} \cdot t^2$$

$$\therefore g = \frac{2dL}{ht^2}$$

4　誤差の処理について

⑴ 統計誤差について

　同じ実験を繰り返し行うのは，実験回数を増やすことにより結果のばらつきの影響を少なくし，精度を高めるためである。実験回数をn，時刻の平均値を$\bar{t}$，それぞれの測定値をt_iとすると，誤差Δtは,

$$\Delta t = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2}$$

または,

$$\Delta t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |t_i - \bar{t}|$$

である。

　この値より小さい桁には精度はないことに注意せよ。例えば，Excel や電卓を用いれば，容易に$\bar{t} = 0.903507 \cdots \mathrm{s}$などと多くの桁で計算できてしまうが，$\Delta t = 0.03642 \cdots \mathrm{s}$となったとすると，$0.01\mathrm{s}$の桁に誤差が含まれることになるので，結果は,

$$t = 0.90 \pm 0.04\mathrm{s}$$

としなければならない。なお，この例を有効数字 2 桁であるという。

$$t = 0.903507 \cdots \pm 0.03642 \cdots \mathrm{s}$$

は誤りである。

⑵ 誤差の伝播について

今回は，時刻tを測定する実験だから，tの誤差について述べたわけだが，結果は重力加速度の大きさgだから，tの誤差がgにどう影響するかを考えなければならない。

誤差の伝播（伝搬）とは，文字通り，ある物理量から他の物理量へと誤差が伝わることである。例えば，測定値をx，それによって得る結果をyとし，$y = 2x$ とすると，$x = 1.0\mathrm{mm}$の場合は，当然，

$$y = 2 \cdot 1.0 = 2.0\mathrm{mm}$$

である。しかし，測定値xに誤差が含まれていて，$x = 1.0 \pm 0.1\mathrm{mm}$ すなわち，xは0.9mmから1.1mmまでの値をとるとすると，

$$y = 2(1.0 \pm 0.1) = 2.0 \pm 0.2\mathrm{mm}$$

となり，yは1.8mmから2.2mmまでの値をとることになる。誤差が伝播した結果，xとyは誤差の幅が異なっているのである。これを，もう少しスマートに表現すると，

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)$$
$$\therefore \Delta y = 2\Delta x$$

となる。

他の例を見てみよう。$y = x^2$ とすると，$x = 2.0\mathrm{cm}$の場合は，

$$y = 2.0^2 = 4.0\mathrm{cm}^2$$

である。ここで，$x = 2.0 \pm 0.1\mathrm{cm}$ すなわち，xは1.9cmから2.1cmまでの値をとるとすると，

$$y = (2.0 \pm 0.1)^2 = 2.0^2 \pm 2 \cdot 2.0 \cdot 0.1 + 0.1^2 = 4.01 \pm 0.4\mathrm{cm}^2$$

ここで，0.01は誤差の桁より小さいので意味がないから，

$$y = 4.0 \pm 0.4\mathrm{cm}^2$$

となる（または，$1.9^2 = 3.6\mathrm{cm}^2$，$2.1^2 = 4.4\mathrm{cm}^2$）。一見，$\Delta y = 4\Delta x$ だが，これは誤りである。正しくは，

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$(\Delta x)^2$は無視できるので，

$$y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x$$
$$\therefore \Delta y = 2x\Delta x$$

である。

このように，関数が複雑になると，誤差の伝播も複雑になる。一般に，関数 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ の誤差 Δf は，変数 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ の誤差 $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \cdots$ で表すことができる。すなわち，誤差の伝播を表す公式が存在する。

$$|\Delta f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\Delta x_3\right)^2 + \cdots}$$

ここで，

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \cdots$$

は，偏微分を表す記号で，$\frac{\partial f}{\partial x_1}$の場合，$x_1$のみを変数とし（$x_2, x_3, \cdots$を定数とみなし），微分することを意味する。

$y = x^2$ の例では，

$$|\Delta y| = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\Delta x\right)^2} = \left|\frac{\partial y}{\partial x}\Delta x\right| = 2|x\Delta x|$$

というように，先と同等の結果になる。

さて，今回の実験では，

$$g = \frac{2dL}{ht^2} = 2dLh^{-1}t^{-2}$$

より，

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 2dLh^{-1} \cdot (-2t^{-3}) = -\frac{4dL}{ht^3}$$

よって，d，L，hの誤差がないとみなせば，

$$|\Delta g| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial t}\Delta t\right)^2} = \left|\frac{\partial g}{\partial t}\Delta t\right| = \frac{4dL}{ht^3}|\Delta t|$$

となる。

t，d，L，hの誤差を考慮すれば，

$$|\Delta g| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial t}\Delta t\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial d}\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial L}\Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial h}\Delta h\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{4dL}{ht^3}\Delta t\right)^2 + \left(\qquad\qquad \cdot \Delta d\right)^2 + \left(\qquad\qquad \cdot \Delta L\right)^2 + \left(\qquad\qquad \cdot \Delta h\right)^2}$$

である。やや複雑だが，Excel や電卓を用いれば数値計算できるであろう。$\frac{\partial g}{\partial d}$，$\frac{\partial g}{\partial L}$，$\frac{\partial g}{\partial h}$を計算して上式の空欄を埋め，チャレンジしてみてほしい。

5　結果

Excel を用いて処理せよ。結果は,

$$g = \qquad \pm \qquad \mathrm{m/s^2}$$

のように表せ。

6　考察