探究 AKCⅡ

テキスト

＜回転体の運動＞

３年________組________番　氏名________________________

1. 角運動量と力のモーメント

質量mの質点が力Fを受け，加速度aで運動するとき，運動方程式は，

$$ma = F$$

$$\therefore m\frac{dv}{dt} = F$$

$$\therefore \frac{d(mv)}{dt} = F$$

この力が回転の中心 O からr離れた作用線上で働いているとする。

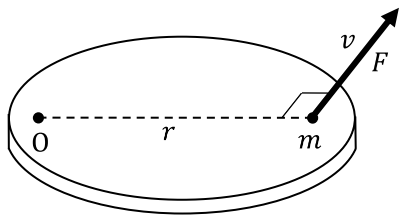


図１　力が回転軸から離れた点に働く

上式の両辺にrをかけて，

$$r\frac{d(mv)}{dt} = rF$$

$$\therefore \frac{d(rmv)}{dt} = rF$$

ここで，

$$rF = N$$

$$rmv = L$$

とおくと，

（1-1）

となる。

ここで，Nは力のモーメント（トルク）である。また，Lは運動量のモーメントとも言える量で，**角運動量**と呼ぶ。

すなわち，**力のモーメントは角運動量を変化させる。**この式は回転についての運動方程式といえる。

2. 慣性モーメントと回転の運動方程式

質量mの質点が，回転の中心 O からr離れた点を角速度ωで回転しているとすると，角運動量は，

$$rmv = rmr\omega = mr^2\omega$$

ここからは，質点ではなく剛体を考える。剛体は質点の集合だから，全角運動量Lは，

$$L = \sum_i m_i {r_i}^2 \omega_i$$

剛体だから，全ての質点の角速度は共通である。したがって，

$$L = \sum_i m_i {r_i}^2 \, \omega$$

ここで，

（2-1）

とおくと，全角運動量 L は，

（2-2）

となる。これを運動量 $p = mv$ と比較すると，Iは，回転において質量と同じ働きをする，すなわち**回転における慣性**を表す量であることがわかる。このIを**慣性モーメント**と呼ぶ。

さて，回転についての運動方程式 $\frac{dL}{dt} = N$ は， $L = I\omega$ より，

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = N$$

（2-3）

となる。これは質点の運動方程式，

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

と似ている。なお，$\frac{dv}{dt}$を加速度というのに対し，$\frac{d\omega}{dt}$を角加速度という。

また，回転についてのエネルギーKは，

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i {v_i}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (r_i\omega)^2$$

（2-4）

3. 斜面を転がる物体の加速度

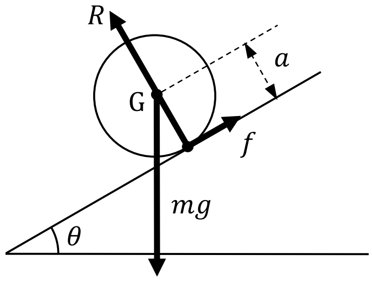


図２　斜面上の回転体が受ける力

重心 G の運動方程式は，

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\theta - f$$

重心Gの回りの力のモーメントを考えると，重力mgと垂直抗力Rは作用線上に回転軸があるのでモーメントは0である。したがって，静止摩擦力fのモーメントによって左回りに回転し始める。

物体の半径をaとすると，重心 G の回りの静止摩擦力のモーメントはafであるから，重心 G の回りの回転についての運動方程式は，

$$I\frac{d\omega}{dt} = af$$

ここで，$v = a\omega$ をtで微分すると，

$$\frac{dv}{dt} = a\frac{d\omega}{dt}$$

より，回転についての運動方程式は，

$$I\frac{1}{a}\frac{dv}{dt} = af$$

これを重心 G の運動方程式に代入すると，

(3-1)

この$\frac{dv}{dt}$が，斜面を転がる加速度である。

＜別解＞力学的エネルギーの保存を考える。

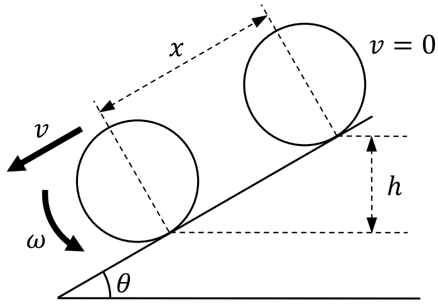


図３　h 低い点での速さは v

力学的エネルギー保存より，

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$v = a\omega$ より，

$$\omega^2 = \frac{v^2}{a^2}$$

$$\therefore mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{a^2}$$

$$\therefore mgh = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{a^2}\right)v^2$$

ここで，$h = x\sin\theta$ より，

$$mgx\sin\theta = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{a^2}\right)v^2$$

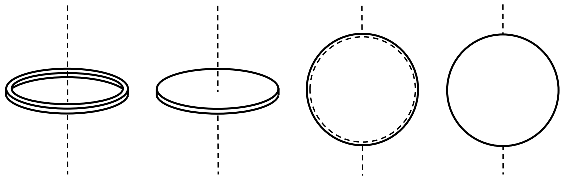
両辺をtで微分すると，

(3-2)

となり，同様の結果が得られる。

4. 様々な物体の慣性モーメントと斜面を転がる加速度

密度が一様な物質からなる以下の物体について,重心のまわりの慣性モーメントを求め,斜面を転がる加速度を計算してみよう。



①輪　　②円板　　③球殻　　④球

図４　慣性モーメントを求める

慣性モーメントIは,

$$I = \sum_i m_i {r_i}^2$$

であるが,質量が連続的に分布している物体については,実際は積分することになる。

① 輪

半径a,質量mとする。

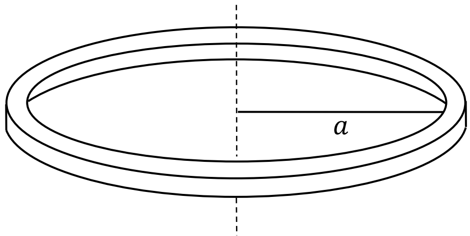


図５　輪

全ての質量が回転軸よりaの位置にあるので,慣性モーメントIは,

$$I = ma^2$$

よって,斜面を転がる加速度をαとすると,

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{mg\sin\theta}{m + \frac{I}{a^2}}$$

$$= \frac{mg\sin\theta}{m + \frac{ma^2}{a^2}}$$

$$= \frac{1}{2} g \sin\theta$$

② 円板

半径a,質量m,面密度σの円板の慣性モーメントを,“バウムクーヘン積分”によって計算してみよう。なお,面密度とは単位面積あたりの質量であり,単位をつけるとすれば[kg/m^2]である。

回転軸からrの位置にある微小幅drの輪の質量は,$2\pi r \cdot dr \cdot \sigma$ なので,円板の慣性モーメントIは,

$$2\pi r \cdot dr \cdot \sigma \cdot r^2$$

を,rで積分すれば求められる。

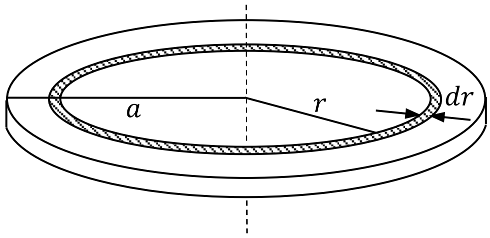


図６　円板を輪の集合として考える

輪は,回転軸からaの位置まで分布しているので,

$$I = \int_0^a 2\pi r dr \sigma r^2$$

(4-1)

ここで,円板の面積はπa^2だから,質量mは,

$$m = \pi a^2 \sigma$$

より,慣性モーメントIは,

(4-2)

よって,斜面を転がる加速度αは,

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{mg\sin\theta}{m + \frac{I}{a^2}}$$

(4-3)

③ 球殻

半径a，質量m，面密度σの球殻の慣性モーメントを計算してみよう。

円や球を考えるときは極座標を用いるのが便利である。ここでは，z軸を回転軸とし，z軸のまわりの慣性モーメントを考えることにする。

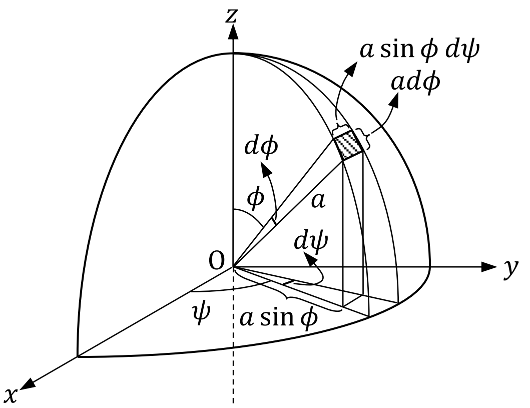


図７　極座標によって質量小片を考える

図７のように，z軸から角ϕ，x軸から角ψの位置にある微小面積を考える。$d\phi$，$d\psi$ともに微小なので，これは長方形と見なしてよい。よって，この微小面積は，

$$a d\phi \cdot a \sin\phi \, d\psi$$

である。よって，その質量は，

$$a d\phi \cdot a \sin\phi \, d\psi \cdot \sigma$$

となる。これが，回転軸（z軸）から

$$a \sin\phi$$

の位置にあるので，球殻の慣性モーメントIは，

$$\begin{aligned} & a d\phi \cdot a \sin\phi \, d\psi \cdot \sigma \cdot (a \sin\phi)^2 \\ &= \sigma a^4 \sin^3\phi \, d\phi d\psi \end{aligned}$$

を，ϕを0からπまで，ψを0から2πまで，それぞれ積分すれば求めることができる。したがって，

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sigma a^4 \sin^3\phi \, d\phi d\psi \\ &= \sigma a^4 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\phi \, d\phi d\psi \end{aligned}$$

さて，積分

$$\int_0^{\pi} \sin^3\phi \, d\phi$$

であるが，三倍角の公式

$$\sin^3\phi = \frac{3\sin\phi - \sin 3\phi}{4}$$

を用いて，

$$\int_0^{\pi} \sin^3\phi \, d\phi$$

（4-4）

となる。したがって慣性モーメントIは，

$$I = \sigma a^4 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\phi \, d\phi d\psi$$

（4-5）

ここで，球殻の面積は$4\pi a^2$だから，質量は，

$$m = 4\pi a^2 \sigma$$

より，慣性モーメントIは，

（4-6）

よって，斜面を転がる加速度αは，

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{mg\sin\theta}{m + \frac{I}{a^2}}$$

（4-7）

④ 球

半径a，質量m，密度ρの球の慣性モーメントを計算してみよう。

円や球を考えるときは極座標を用いるのが便利である。ここでは，z軸を回転軸とし，z軸のまわりの慣性モーメントを考えることにする。

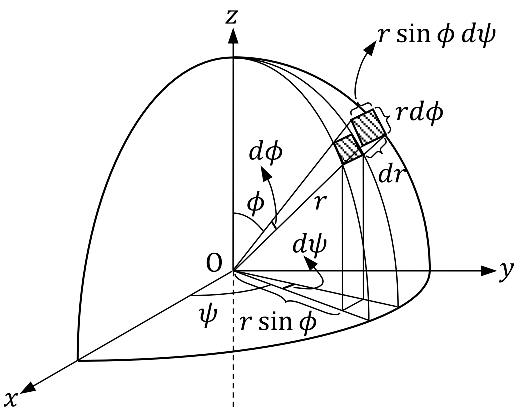


図８　極座標によって質量小片を考える

基本的には球殻の場合と同様の方針だが，球の場合は質量が法線方向にも分布しているので，図８のように質量小片を面積ではなく体積で考えなければならない。z軸から角ϕ，x軸から角ψ，球の中心（原点）からrの位置にある微小体積を考える。これは直方体と見なせて，その体積は，

$$rd\phi \cdot r\sin\phi\, d\psi \cdot dr$$

よって，その質量は，

$$rd\phi \cdot r\sin\phi\, d\psi \cdot dr \cdot \rho$$

これが，回転軸から

$$r\sin\phi$$

の位置にあるので，球の慣性モーメントIは，

$$rd\phi \cdot r\sin\phi\, d\psi \cdot dr \cdot \rho \cdot (r\sin\phi)^2$$
$$= \rho r^4 \sin^3\phi\, d\phi d\psi dr$$

を，ϕを0からπまで，ψを0から2πまで，rを0からaまで，それぞれ積分すれば求めることができる。したがって，

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho r^4 \sin^3\phi\, d\phi d\psi dr$$
$$= \rho \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^4 \sin^3\phi\, d\phi d\psi dr$$

さて，

$$\int_0^{\pi} \sin^3\phi\, d\phi$$

の積分は③球殻での考察と同様に，

$$\int_0^{\pi} \sin^3\phi\, d\phi = \frac{4}{3}$$

であるので，慣性モーメントIは，

$$I = \rho \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^4 \sin^3\phi\, d\phi d\psi dr$$

(4-8)

ここで，球の体積は，

$$\frac{4}{3}\pi a^3$$

だから，質量は，

$$m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$$

より，慣性モーメントIは，

(4-9)

よって，斜面を転がる加速度αは，

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{mg\sin\theta}{m + \frac{I}{a^2}}$$

(4-10)

5. 斜面を転がる物体の加速度の測定

5-1 目的

輪，円板，球殻，球，台車が斜面を転がる加速度を測定し，慣性モーメントを考慮して計算した理論値と一致することを検証する。

5-2 方法

(1) 準備

輪（アルミニウム製パイプ，30mm）
円板（アルミニウム製，30mm）
球殻（金属製，30mm）
球（金属製，30mm）
力学台車
斜面（力学実験用滑走台またはベニヤ板）
台（辞書など）
ストッパー（物体を止める板２枚）
物差し（1m）
ストップウォッチ
電卓
PC

(2) 斜面の固定と$\sin\theta$の測定

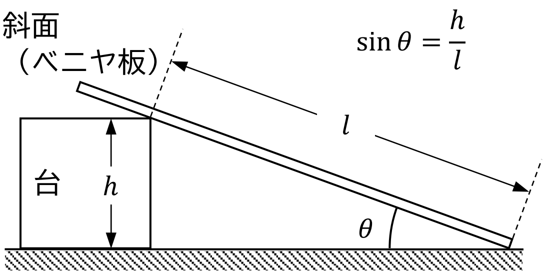


図９　$\sin\theta$の測定の例

(3) 加速度の理論値α_0[m/s^2]の計算

前節で計算した加速度の式に$\sin\theta$の値を代入し，理論値を計算する。

(4) 加速度の測定

等加速度直線運動の公式より，初速度0m/sだから，

$$x = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\therefore \alpha = \frac{2x}{t^2}$$

すなわち，距離x[m]と時間t[s]が分かれば，加速度α[m/s^2]を求められる。

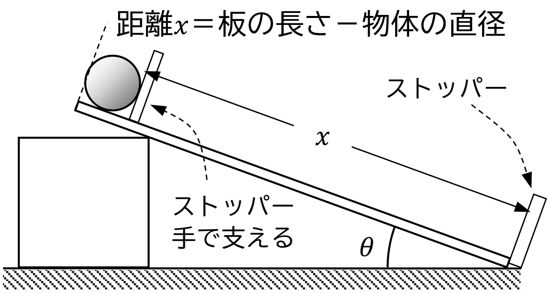


図 10　測定の実際

ただし，xにもtにも誤差があるため，それらを考慮しなければならない。

まず，xの読み取り誤差Δxについて説明しよう。

xは物差しで測定するが，物差しなどで測定する場合は，最小目盛の10分の1まで読み取るのが原則である。今回は最小目盛1mmの物差しで測定するため，0.1mmまで読み取る必要がある。xは各自でちょうどよい数値に設定すればよいので（斜面上に印をつけてよい），例えば，$x = 80$cmの場合は，

$$x = 800.0\text{mm}$$

となる。ここでは，物理チャレンジで指示される方法にしたがって，最小目盛の2分の1の読み取り誤差があるとしよう。すなわち，

$$\Delta x = 0.5\text{mm}$$

$$x \pm \Delta x = 800.0 \pm 0.5\text{mm}$$

$$x \pm \Delta x = 0.8000 \pm 0.0005\text{m}$$

である。

続いて，時間tの統計誤差について説明しよう。

tはディジタルのストップウォッチで測定するため，読み取り誤差について議論できないが，複数回測定すると必ず測定値にばらつきが生じる。

物理量tをn回測定した時の統計誤差Δtは，一般に次の式で表される。

$$\Delta t = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}$$

ここで，$\bar{t}$はtの平均である。

今回は，一つの物体について落下時間を10回測定することにしよう。すなわち，上式で$n=10$としてΔtを求めよう。

最後に，加速度αの誤差$\Delta\alpha$について説明しよう。先に示したように，

$$\alpha = \frac{2x}{t^2}$$

だから，測定値xとtに誤差があるため，αにも誤差があることになる。ある物理量から他の物理量へと誤差が伝わることを**誤差の伝播**という。

一般に，関数$f(x_1,x_2,x_3,\cdots)$の誤差Δfは，変数$x_1,x_2,x_3,\cdots$ の誤差$\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3,\cdots$で表すことができる。すなわち，誤差の伝播を表す公式が存在する。

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\Delta x_3\right)^2+\cdots}$$

ここで，

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},\quad \frac{\partial f}{\partial x_1},\quad \frac{\partial f}{\partial x_1},\quad \cdots$$

は，偏微分を表す記号で，$\frac{\partial f}{\partial x_1}$の場合，$x_1$のみを変数とし（$x_2,x_3,\cdots$を定数とみなし），微分することを意味する。

したがって，

$$\Delta\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\Delta x\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Delta t\right)^2}$$

(5-1)

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} =$$

(5-2)

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} =$$

(5-3)

$$\Delta\alpha =$$

5-3 結果

$$\sin\theta =$$

(1) 輪（アルミニウム製パイプ，30mm）

加速度の理論値

$\alpha_0 =$

距離

$x \pm \Delta x =$

時間

i	t_i[s]	$t_i - \bar{t}$[s]	$(t_i - \bar{t})^2$[s^2]
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
合計			
平均			

$\Delta t =$

加速度の誤差

$\Delta\alpha =$

加速度

$\alpha \pm \Delta\alpha =$

(2) 円板（アルミニウム製，30mm）

加速度の理論値

$\alpha_0 =$

距離

$x \pm \Delta x =$

時間

i	t_i[s]	$t_i - \bar{t}$[s]	$(t_i - \bar{t})^2$[s^2]
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
合計			
平均			

$\Delta t =$

加速度の誤差

$\Delta\alpha =$

加速度

$\alpha \pm \Delta\alpha =$

(3) 球殻（金属製，30mm）

加速度の理論値

$\alpha_0 =$

距離

$x \pm \Delta x =$

時間

i	$t_i[\mathrm{s}]$	$t_i - \bar{t}[\mathrm{s}]$	$(t_i - \bar{t})^2[\mathrm{s}^2]$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
合計			
平均			

$\Delta t =$

加速度の誤差

$\Delta \alpha =$

加速度

$\alpha \pm \Delta \alpha =$

(4) 球（金属製，30mm）

加速度の理論値

$\alpha_0 =$

距離

$x \pm \Delta x =$

時間

i	$t_i[\mathrm{s}]$	$t_i - \bar{t}[\mathrm{s}]$	$(t_i - \bar{t})^2[\mathrm{s}^2]$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
合計			
平均			

$\Delta t =$

加速度の誤差

$\Delta \alpha =$

加速度

$\alpha \pm \Delta \alpha =$

(5) 力学台車

加速度の理論値

$\alpha_0 =$

距離

$x \pm \Delta x =$

時間

i	$t_i[\mathrm{s}]$	$t_i - \bar{t}[\mathrm{s}]$	$(t_i - \bar{t})^2[\mathrm{s}^2]$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
合計			
平均			
$\Delta t =$			

加速度の誤差

$\Delta\alpha =$

加速度

$\alpha \pm \Delta\alpha =$

(6) その他の回転体 (　　　　　　　　　)

加速度の理論値

$\alpha_0 =$

距離

$x \pm \Delta x =$

時間

i	$t_i[\mathrm{s}]$	$t_i - \bar{t}[\mathrm{s}]$	$(t_i - \bar{t})^2[\mathrm{s}^2]$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
合計			
平均			
$\Delta t =$			

加速度の誤差

$\Delta\alpha =$

加速度

$\alpha \pm \Delta\alpha =$

5-4 考察

6. ベクトル積を用いた表現

さて，これまでの展開は，角運動量も力のモーメントもスカラーとして取り扱ってきたが，物理学ではこれらをベクトルとして定義している。実際，角運動量や力のモーメントをベクトルとして取り扱うと，より複雑な剛体の運動をすっきりと表現できることが多い。

例えば，図 11 のように，回転の中心と作用点とを結ぶ直線が作用線と直角でない場合を考えてみよう。

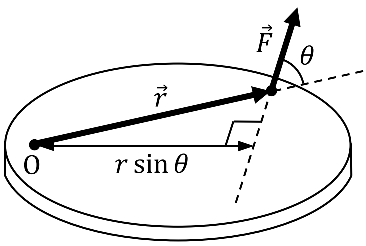


図 11　回転の中心と作用点とを結ぶ直線が作用線と直角でない場合

このとき，力のモーメントの大きさNは，

$$N = (r\sin\theta)F$$
$$= rF\sin\theta$$

である。そこで，2 つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$のベクトル積$\vec{a}\times\vec{b}$の大きさが，

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = ab\sin\theta$$

であることを利用し，力のモーメントを

$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F}$$

と定義する。

$\vec{a}\times\vec{b}$の向きは，$\vec{a}$から$\vec{b}$の向きに右ねじを回したとき，右ねじが進む向きであるから，力のモーメント$\vec{N}$の向きは，位置ベクトル$\vec{r}$から力$\vec{F}$の向きに右ねじを回したとき，右ねじが進む向きとなる。

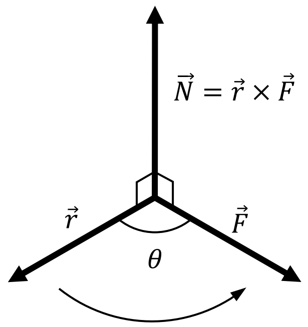


図 12　力のモーメントをベクトルで定義する

同様に，角運動量$\vec{L}$も位置ベクトル$\vec{r}$と運動量ベクトル$m\vec{v}$のベクトル積として定義できる。

$$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v}$$

回転に関する運動方程式は，

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

となる。すなわち，**外力のモーメントが加わると，その向きに角運動量が変化する**ということである。

ここでは，**こま**の運動を取り上げてみよう。回転しているこまは，回転軸の先端が弧を描くように運動する（歳差運動）。支点と重心が同一鉛直線上になくても，倒れずにこのような運動をするのはなぜだろうか。

こまが図 13 のように回転している場合，角運動量は位置ベクトル$\vec{r}$と運動量ベクトル$m\vec{v}$のベクトル積だから，回転軸の方向である。

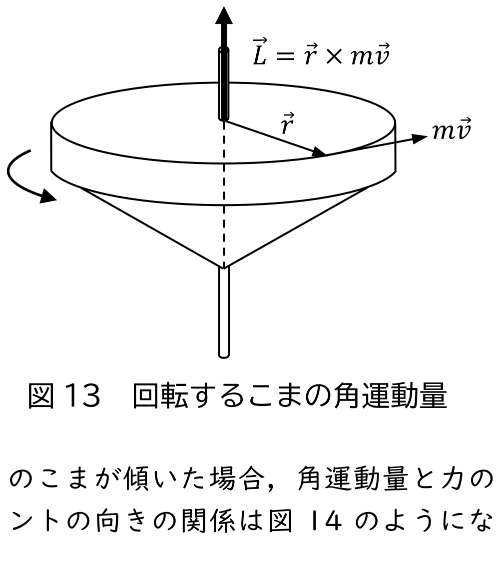


図 13　回転するこまの角運動量

このこまが傾いた場合，角運動量と力のモーメントの向きの関係は図 14 のようになる。

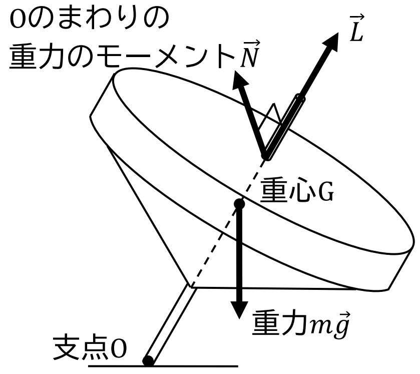


図 14　こまが傾いたときの角運動量と力のモーメントの向き

角運動量は外力のモーメントの向きに変化し，互いに直角なので，図 15 のように，回転軸は倒れずに，先端が弧を描くように運動する。

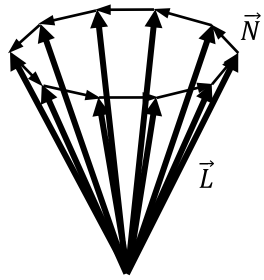


図 15　回転するこまの角運動量の変化

このように，角運動量と力のモーメントをベクトルとして定義すると，これまでの知識では説明することができなかった，やや複雑な運動を説明することができる。

7. レポートの作成について

レポートは A4 レポート用紙 1 枚以上とする。提出期限は 2 学期の始業式とするが，極力，本日中に書き，明日提出するのが望ましい。

必要な情報は以下の通りである。

- タイトル
- 氏名
- 目的
- 方法
- 結果
- 考察

以下に，物理チャレンジの募集要項で示されているレポートの書き方を引用するので参考にしてほしい。

（引用始め）

(1) 実験の目的

このレポートは，何を目的とした実験なのか，何を報告するのかなどをはじめに述べます。特に，自分なりの視点，自分の独創性がどこにあるのか，このセクションにあらかじめ書いておくとよいです。レポートの表題もそれらが反映されたものであることが望ましいです。

(2) 実験手法

実験の原理，装置や計測器具の説明，測定方法や実験条件などを詳しく述べます。つまり，このセクションを読んで，他の人が同じことを繰り返して実験できるために必要な情報はすべて書きます。写真や模式図などを活用するとよいでしょう。

(3) 実験結果

観察や測定で得られたデータを示し，それから何が言えるかを述べます。実験データは数値の羅列ではなく，グラフや表を使ってわかりやすく表現します。

(4) 考察

実験結果を解析し，その解釈や自分の意見などを述べます。その際，実験の不確かさ（誤差）などについての考察も行うとよいでしょう。実験結果が，「理科年表」などに記載の値と異なったときには，単純に実験が失敗だったと考えずに，何が原因で違った値になったのかを考察し，改善策などを考えることが重要です。

(5) 結論

「(1)実験の目的」に照らしあわせ，実験およびその解析の結果，どのような結論が得られたのかを述べます。これはあくまでも結論であって単なる実験の結果ではないので注意すること。

(6) 参考資料

実験の実施やレポート作成にあたり，参考にした本や論文，インターネットのサイトなどをリストアップします。それぞれの資料に番号をつけ，セクション「(1)実験の目的」～「(5)結論」の中で引用するときは，その番号で引用すること。参考資料から仕入れた他の人の発想や考えを自分のもののようにレポートに書くのは一種の盗作であるので，それらの出所を明示することは重要です。

(7) 共同実験者と役割分担

もし実験や解析を先生や友達など他の人と協力して行った場合には，名前を挙げ，その人たちおよび自分の役割分担を明確に記します。また，先生をはじめ他の人から助言などを受けたときは，それも明記すること。

（引用終わり）

西高